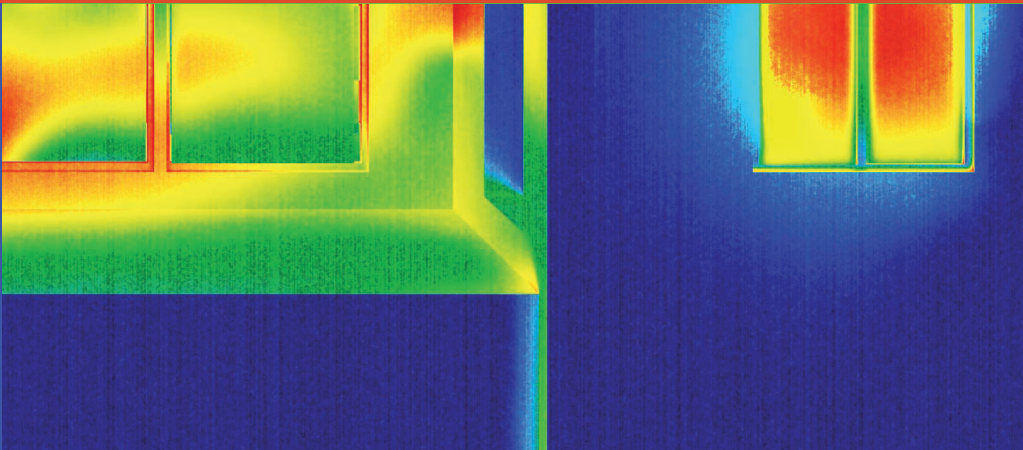


Coordonnateur
Jean-François Sacadura

Transferts thermiques

Initiation et approfondissement



Lavoisier
TEC & DOC

Transferts thermiques aux petites échelles

*Pierre-Olivier Chapuis, Rémi Revellin,
Rodolphe Vaillon*

Les micro- et nanotechnologies permettent aujourd'hui d'élaborer des matériaux dont les dimensions caractéristiques sont très inférieures au millimètre, de quelques dizaines de micromètres jusqu'à l'échelle de l'atome : microcanaux, composants en microélectronique, nanofils, nanofilms, nanoparticules, super-réseaux (empilements périodiques de couches minces), matériaux constitués de couches uniques d'atomes tels que les nanotubes de carbone ou le graphène, etc. Ces matériaux et les nanocomposites associés (par exemple constitués de nanomatériaux inclus dans une matrice macroscopique) sont utilisés dans des systèmes pour des applications très variées, qui balayent un spectre allant du microprocesseur informatique bien connu du grand public au médicament (molécule) de pointe. Le pointeur laser, les microsystèmes électromécaniques (d'acronymes anglais MEMS) présents dans certaines montres, les panneaux photovoltaïques, l'encapsulation de certains médicaments, et les crèmes solaires sont quelques exemples des domaines où les micro- et nanotechnologies ont un impact important. Le domaine de la microélectronique, qui a vu croître la densité de composants de manière exponentielle et la fréquence d'horloge des microprocesseurs augmenter fortement depuis les années 1960, est particulièrement soumis à des contraintes thermiques très complexes : les puissances thermiques à évacuer des dispositifs deviennent très importantes en regard du volume disponible à cause de la miniaturisation. Il est bien connu que les échauffements et les dilatations qui peuvent être entraînées sont à l'origine de ruptures ou de défaillances des composants : il est donc important de maîtriser précisément les excitations thermiques imposées. Or, *aux dimensions micro- et nanométriques, les modèles classiques*

pour décrire les transferts thermiques ne sont plus toujours valides, bien que la matière puisse généralement encore être considérée comme continue (l'échelle nanométrique reste très supérieure à celle de l'atome). Ceci pose donc un certain nombre de problèmes à l'ingénieur thermicien.

Le sous-domaine de la thermique qui aborde ces thématiques est appelé *micro- et nanothermique*, et peut être subdivisé selon les trois champs disciplinaires qui ont déjà été rencontrés dans cet ouvrage (voir chapitres 2, 3 et 4) : la conduction thermique subdiffusive, la thermique micro/nanofluidique et le rayonnement thermique sub-longueur d'onde. Le transfert thermique par conduction fait l'objet de la première partie (chapitre 9, 1), où il est mis en évidence que la connaissance de la nature (régime particulaire ou ondulatoire) et des tailles caractéristiques des *porteurs d'énergie*, ainsi que de leurs interactions, est fondamentale. Pour le rayonnement, c'est la nature électromagnétique du transfert thermique qui doit être prise en compte aux petites échelles en considérant les équations de Maxwell. Ce sujet est traité en détail dans la deuxième partie (chapitre 9, 2). En convection, les phénomènes d'écoulement deviennent fortement influencés par l'interaction fluide-surface ou par la taille des matériaux convectés par l'écoulement. La troisième partie (chapitre 9, 3) permettra au lecteur de se familiariser avec ces thématiques. Ces trois sections sont très indépendantes et elles ont été conçues de sorte qu'il soit tout à fait possible d'en aborder une sans lire les autres. Notons que, dans les conditions standard de température et de pression, les phénomènes de microconvection ont lieu pour des tailles de plusieurs microns (jusqu'au millimètre), les phénomènes de rayonnement thermique non-macroscopique deviennent importants vers 10 microns et les phénomènes de conduction sub-diffusifs à une échelle inférieure au micron. Dans tous les cas, des problématiques nouvelles apparaissent, telles que la description du *transfert de chaleur aux interfaces*.

1. ■ Conduction thermique à l'échelle nanométrique

Pierre-Olivier CHAPUIS

1.1. Introduction

L'objectif de cette section est de mettre en évidence les effets de taille qui modifient le phénomène de conduction thermique tel qu'il a été traité au chapitre 2. À l'échelle macroscopique, la conduction thermique est dite *diffusive* et on définit la *conductivité thermique* comme la grandeur qui permet de relier la densité de flux thermique et le gradient de température : c'est la loi de Fourier. Cette section a pour but de préciser quand cette approche est valide, et, lorsqu'elle ne l'est pas, de proposer des approches alternatives. Il s'avère qu'un grand nombre des effets de taille qui rendent la loi de Fourier caduque apparaissent, à température ambiante (vers 300 K), à l'échelle dite nanométrique (inférieure

à 1 micromètre) : ils sont donc regroupés sous l'appellation « conduction thermique à l'échelle nanométrique ». Il faut cependant garder à l'esprit que ces effets peuvent apparaître à d'autres échelles lorsque l'on se place dans d'autres gammes de température.

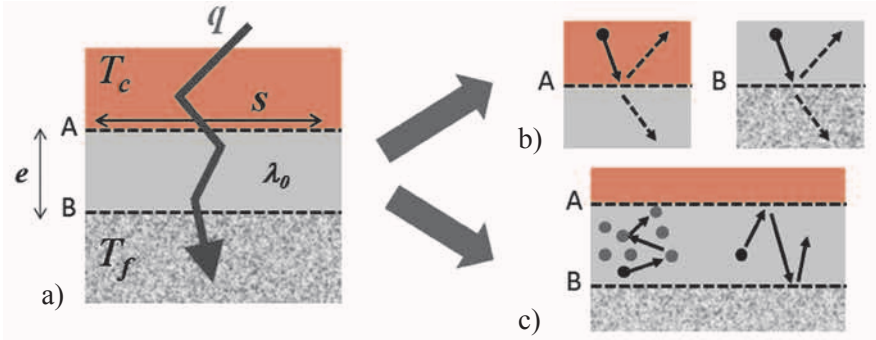


Figure 9.1

L'influence de la taille faible de la couche située entre les contacts A et B joue de deux manières sur le flux transféré : les effets de surface peuvent devenir plus importants b), ou le régime de transport des porteurs d'énergie peut être modifié c).

1.1.1. Résistance thermique de contact parfait

Lorsque la taille d'un milieu diminue, le phénomène de conduction thermique peut être modifié pour plusieurs raisons. Il est illustratif de considérer un matériau de conductivité thermique λ_0 intercalé entre deux matériaux, considérés comme des bains thermiques de température T_c et T_f (figure 9.1). Le flux thermique conduit de la source chaude à la source froide s'écrit alors $q = (T_c - T_f)/R$, où R est la résistance thermique associée à ce trajet (voir chapitre 2, figure 2.10). Celle-ci s'exprime sous la forme :

$$R = R_A + \frac{e}{\lambda_0 S} + R_B \tag{9.1}$$

où R_A et R_B sont les résistances thermiques associées aux contacts entre les matériaux en A et en B, e est l'épaisseur de la couche et S la section traversée par le flux. On constate que, lorsque e diminue, le terme central, qui est associé à la résistance au flux thermique dans la couche de volume eS , peut devenir négligeable devant les résistances thermiques de contact. Ces résistances thermiques de contact peuvent être dues à l'imperfection du contact, comme il l'a été mentionné au chapitre 2. Mais elles peuvent aussi exister pour un contact parfait, comme nous allons le montrer dans le chapitre 9, 1.3.3. Leur existence est simplement due au fait que les matériaux sont différents. Nous observons ici un premier effet de taille, qui peut être important à l'échelle nanométrique : lorsque l'épaisseur de la couche diminue, les effets de surface peuvent devenir prépondérants devant les effets de volume.

Il convient ici d'introduire les « **porteurs d'énergie** » qui sont responsables des transferts thermiques conductifs. Les porteurs d'énergie peuvent généralement être assimilés à des particules ou des quasi-particules¹, dont la **nature** et les interactions vont définir le régime de transfert conductif. Un porteur d'énergie peut avoir une certaine probabilité d'être transféré du matériau de température T_c au matériau de conductivité thermique λ_0 (voir figure 9.1 b). La résistance thermique est alors due au fait que tout porteur d'énergie ne peut pas être *transmis* à travers la surface : certains sont réfléchis, ce qui limite le flux thermique.

1.1.2. Tailles caractéristiques des porteurs d'énergie

Indépendamment de ce phénomène surfacique de *transmission*, le transfert de chaleur conductif peut également être modifié à l'intérieur de la couche d'épaisseur e . Le *régime de conduction thermique* est alors différent de celui présenté au chapitre 2 (régime de diffusion). Afin de déterminer le régime de conduction, il est nécessaire d'analyser les *tailles caractéristiques* des porteurs d'énergie lors du phénomène de conduction thermique, et celles-ci doivent être *comparées aux dimensions* du milieu considéré. Le *tableau 9.1* recense les différents porteurs d'énergie dans les milieux où la conduction thermique peut avoir lieu : gaz, liquides, milieux visqueux tels que les polymères, et les solides ordonnés (cristaux) ou désordonnés (amorphes).

Tableau 9.1. Transfert de chaleur par conduction thermique : les porteurs d'énergie.

Milieu		Porteur d'énergie principal
Gaz		Molécule
Solide	Cristal diélectrique (isolant ou semi-conducteur non dopé)	Phonon = Vibration collective des atomes (onde)
	Amorphe	Vibration collective d'un faible nombre d'atomes (moins étendu)
	Métal	Électron
Liquide		Molécule
Polymère		Vibration collective d'atomes étendue le long d'une chaîne moléculaire et peu étendue à travers des chaînes moléculaires différentes

Lorsque les milieux sont peu denses, comme les gaz, les interactions entre les porteurs d'énergie (les molécules pour cet exemple) n'ont lieu que pendant une portion brève de leur mouvement : on peut donc séparer le mouvement des

1. Une particule peut être isolée et placée dans le vide : un photon ou un électron sont des particules. Une quasi-particule existe uniquement dans la matière : c'est par exemple le cas des phonons, introduits dans ce chapitre. On traite une quasi-particule exactement comme une particule, mais on ne peut pas l'isoler et la placer dans le vide.

porteurs entre deux phases, l'une dite « libre parcours » et l'autre appelée « collision ». La distance moyenne entre deux collisions successives est appelée **libre parcours moyen** des porteurs d'énergie (noté Λ).

La portée du *potentiel d'interaction* entre les atomes est approximativement donnée par le rayon atomique, qui vaut typiquement quelques Angströms ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Ainsi, lorsque les milieux sont très denses, les atomes sont en interaction permanente et on ne peut pas distinguer les deux phases mentionnées précédemment. On a alors recours à une modélisation différente. Dans un solide cristallin, les atomes sont disposés de manière totalement ordonnée : l'agencement spatial *périodique* permet d'introduire une **longueur d'onde** (période spatiale). Les porteurs d'énergie considérés sont alors des ondes associées aux mouvements collectifs des atomes dans *tout le cristal* appelés *phonons*.

Si les atomes sont proches mais que la structure est désorganisée, comme dans un solide amorphe ou un liquide, les phénomènes ondulatoires, qui requièrent de l'ordre pour être sensibles (interférences constructives), ne sont pas utiles pour décrire le transfert thermique.

La loi de Broglie² stipule qu'on peut associer une longueur d'onde λ_{DB} à tout corps en mouvement avec une quantité de mouvement p :

$$\lambda_{DB} = h/p \quad [9.2]$$

où h est la constante de Planck et $\vec{p} = m \vec{v}$ est la *quantité de mouvement* pour une particule de masse m et de vitesse v . Lorsque la distance entre deux corps est plus grande que la longueur d'onde de de Broglie, on peut considérer qu'il n'y a pas d'interaction hors phase de collision. C'est le cas pour les gaz à température ambiante, pour lesquels λ_{DB} vaut quelques nanomètres au plus alors que les molécules peuvent être espacées de plusieurs dizaines de nanomètres. Aux basses températures notamment, la quantité de mouvement est plus faible, la *longueur d'onde thermique* de de Broglie devient grande et des *effets quantiques* peuvent apparaître.

Cette rapide discussion a permis de mettre en évidence les deux grandeurs caractéristiques des porteurs d'énergie que sont la *longueur d'onde* et le *libre parcours moyen*. Nous allons déterminer lesquelles de ces deux grandeurs sont déterminantes pour chacun des porteurs d'énergie considérés dans ce chapitre.

1.1.3. Régimes de conduction thermique

La conduction thermique, lorsqu'elle n'est pas *diffusive* comme au chapitre 2, peut être *ballistique* (Figures 9.1 c, 9.2 b) ou même *ondulatoire*. La figure 9.2 montre les mouvements des porteurs d'énergie en *régime diffusif* et en *régime ballistique* : dans le premier de ces deux cas, ils subissent un grand nombre d'événements de diffusion (collision). À chaque collision, une partie de l'énergie du porteur est échangée avec le partenaire de collision : un grand nombre de

2. Prononciation : [brœj].

collisions favorise donc l'homogénéisation de l'énergie des porteurs d'énergie. Il y a alors *équilibre thermodynamique local* (E.T.L.). Dans le second cas, les porteurs d'énergie n'interagissent pas dans le volume car leur libre parcours moyen est trop grand par rapport à la taille du milieu. L'essentiel des interactions a donc lieu avec les surfaces : c'est le régime balistique. Une portion de l'énergie des porteurs d'énergie est cédée par collision avec la surface froide ; de même, les porteurs d'énergie captent une partie de l'énergie de la surface chaude lorsqu'ils interagissent avec elle.

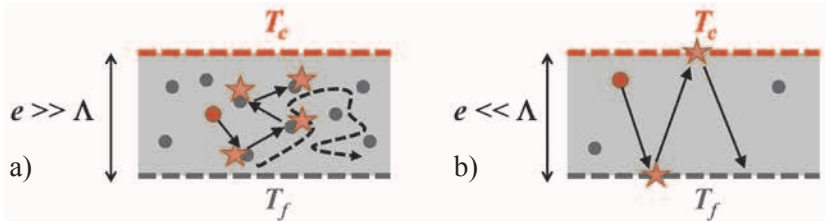


Figure 9.2 a) Transfert diffusif : la particule subit un grand nombre de collisions entre les deux surfaces. b) Transfert balistique : la particule se déplace d'une surface à l'autre sans collision : l'énergie des porteurs est acquise ou cédée aux surfaces.

On définit le nombre de Knudsen³ comme le rapport entre le libre parcours moyen des particules et la taille caractéristique D du système :

$$\text{Kn} = \frac{\Lambda}{D}. \quad [9.3]$$

Lorsque $\text{Kn} \ll 1$, le transfert de chaleur est diffusif : la loi de Fourier peut être utilisée pour le modéliser. Lorsque $\text{Kn} \gg 1$, le transfert de chaleur est balistique. Entre les deux régimes, il y a une zone de transition. Le *tableau 9.2* des valeurs des libres parcours moyens de quelques porteurs d'énergie courants nous montre que la conduction perd son caractère diffusif pour des dimensions caractéristiques nanométriques.

Tableau 9.2. Estimations des libres parcours moyens des porteurs d'énergie à température ambiante.

Porteurs d'énergie	Libre parcours moyen
Électron (métal)	30 nm
Phonon (silicium)	300 nm
Molécule (air)	70 nm

3. Du nom de Martin Knudsen (1871-1949).

Le *transport ondulatoire* doit être considéré lorsque la *longueur d'onde*⁴ des porteurs d'énergie est comparable aux dimensions des matériaux. Des effets d'interférences apparaissent, et des effets quantiques peuvent surgir dans certains cas. Ce régime est essentiellement observé à basse température (quelques kelvins) ou pour de très faibles dimensions (nanomètre à l'ambiante). Il est important de bien réaliser que ceci ne signifie pas que le caractère ondulatoire des porteurs puisse toujours être négligé dans d'autres conditions.

1.1.4. Organisation de la section

Afin de déterminer quelles peuvent être les conséquences de la nanostructuration, il est nécessaire de comprendre les mécanismes qui permettent les transferts conductifs de chaleur : nous détaillerons donc les *mécanismes microscopiques* qui sont à l'origine du phénomène de diffusion thermique. La conduction dans un gaz parfait sera traitée en premier lieu. L'équation de transport des porteurs d'énergie, *l'équation de Boltzmann*, sera introduite, afin de bien comprendre le régime de diffusion. On démontrera notamment l'expression de la conductivité thermique grâce à la théorie cinétique des gaz (*voir* chapitre 9, 1.2.1). Le régime limite balistique sera ensuite traité, et les effets inhabituels pourront être mis en évidence sur les paramètres usuels (température, flux) (*voir* chapitre 9, 1.2.2). La méthode introduite sera ensuite appliquée à la conduction thermique dans les métaux (*voir* chapitre 9, 1.3.1). Il sera montré qu'il y a un lien entre la conduction thermique et la conduction électronique. Le cas des solides cristallins pourra ensuite être abordé : les porteurs d'énergie y sont les phonons, qui seront présentés en détail (*voir* chapitre 9, 1.3.2). Quelques résultats marquants de conduction thermique où la nanostructuration joue un rôle crucial seront finalement mentionnés (*voir* chapitre 9, 1.3.2.9 à 1.3.2.11). Des valeurs de résistances thermiques de contact seront également recensées (*voir* chapitre 9, 1.3). Plusieurs caractéristiques des amorphes et des polymères seront enfin brièvement mentionnées en fin de section (*voir* chapitre 9, 1.4). Seule la modification de la conduction thermique dans les liquides ne sera pas abordée dans cette section, car les éventuels effets de l'échelle nanométrique apparaissent à des tailles de l'ordre du nanomètre encore plus petites que celles que nous considérerons [1]. Notons enfin que nous ne traiterons que les effets stationnaires dans cette section, et que nous ne considérerons pas les effets des temps courts [2 ; 3 ; 4] ou de couplages entre porteurs d'énergies de natures différentes [5]. Le lecteur trouvera dans cette section les principales références, et pourra se reporter à la bibliographie [1 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10] pour plus de détails.

4. En toute rigueur, une « *longueur de cohérence* » devrait être introduite.

1.2. Conduction thermique dans les gaz

1.2.1. Théorie cinétique des gaz et loi de Fourier

Dans un premier temps, nous démontrons la loi de Fourier dans un gaz monoatomique.

1.2.1.1. Équation de conservation du nombre de porteurs d'énergie

a. Fonction de distribution

Un porteur d'énergie, une molécule dans le cas d'un gaz, peut être repéré par sa position \vec{r} et sa vitesse \vec{v} . Considérons une enceinte fermée de volume V dans laquelle sont situées N_0 molécules, en régime stationnaire. Nous souhaitons déterminer la probabilité qu'une molécule possède une vitesse proche de \vec{v} (la vitesse est \vec{v} à $d^3\vec{v}$ près, où $d^3\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$) : cette probabilité est notée $P(\vec{v}) \cdot d^3\vec{v}$. En sommant toutes les probabilités des vitesses, la fonction P peut être intégrée de sorte que :

$$\int_{v_x, v_y, v_z = -\infty}^{+\infty} P(v_x, v_y, v_z) d^3\vec{v} = 1, \quad [9.4]$$

car il est certain que chaque composante de la vitesse de la molécule est comprise entre $-\infty$ et $+\infty$. Puisque N_0 molécules sont situées dans le volume V , le nombre de molécules qui ont une vitesse proche de \vec{v} (à $d^3\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ près) est donné en moyenne par $dN_{\text{molécules}} = N_0 \cdot P(\vec{v}) d^3\vec{v}$. Le produit $n(\vec{v}) = \frac{N_0 \cdot P(\vec{v})}{V}$ est appelé *fonction de distribution* et est fondamental pour la suite. D'après [9.4], on aura la condition :

$$\int_{v_x, v_y, v_z = -\infty}^{+\infty} n(\vec{v}) d^3\vec{v} = \frac{N_0}{V} = N^*, \quad [9.5]$$

où N^* est la densité de molécules [m^{-3}].

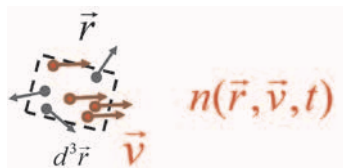


Figure 9.3 La fonction de distribution en \vec{r} repère la fraction des molécules qui ont la vitesse \vec{v} (mises en évidence en rouge).

La définition de la fonction de distribution est généralisée : elle peut dépendre de la position \vec{r} ou du temps t . Ainsi, on définit la fonction de distribution notée

$n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ [$s^3 \cdot m^{-6}$] dans l'espace (\vec{r}, \vec{v}) (dit « espace des phases ») de la manière suivante :

$$dN_{molécules} = n(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} \tag{9.6}$$

où $dN_{molécules}$ est le nombre de molécules présentes dans le volume élémentaire $d^3\vec{r}$ situé en \vec{r} et dont la vitesse est \vec{v} à $d^3\vec{v}$ près à l'instant t .

b. Conservation du nombre de molécules dans le cas où il n'y a pas d'interaction entre molécules

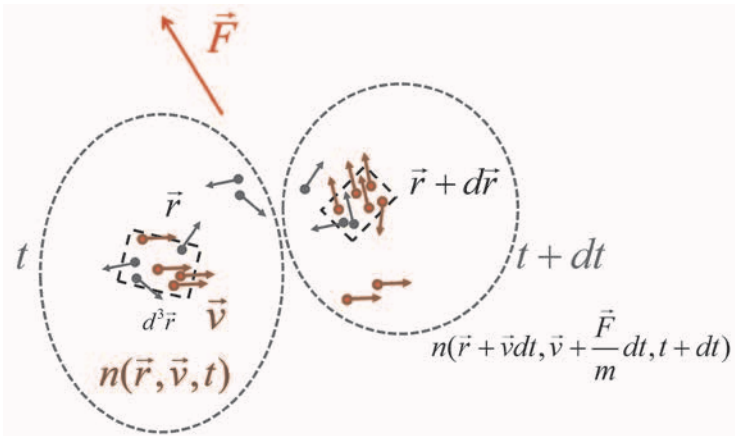


Figure 9.4 Évolution de la fonction de distribution pendant un temps élémentaire dt .

On observe l'évolution du nombre de molécules $dN_{molécules}$ repérées initialement par $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ à la position \vec{r} . La position des molécules évolue pendant dt et est ensuite notée $\vec{r} + d\vec{r}$, avec $d\vec{r} = \vec{v} dt$: les molécules se sont déplacées puisqu'elles sont en mouvement. La vitesse des molécules évolue aussi, sous l'action éventuelle d'une force extérieure $\vec{F}(\vec{r})$: la vitesse devient alors $\vec{v} + d\vec{v} = \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt$, où m est la masse d'une molécule. En l'absence d'interaction entre les molécules, la conservation du nombre de molécules s'écrit alors :

$$\begin{aligned} dN_{molécules} &= n(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} \\ &= n\left(\vec{r} + \vec{v} dt, \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt, t + dt\right) \end{aligned} \tag{9.7}$$

c. Interaction entre molécules

Certaines molécules peuvent être déviées, notamment si elles entrent en collision, et leurs vitesses sont alors modifiées, en module, en direction, ou les deux. Une partie des molécules initialement identifiées par $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ne sera donc plus repérée par $n\left(\vec{r} + \vec{v} dt, \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt, t + dt\right)$. De même, certaines molécules qui

n'étaient pas repérées par $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ peuvent acquérir une vitesse $\vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt$ et se situer en $\vec{r} + \vec{v} dt$ suite à une collision. Afin de prendre ces phénomènes en compte, on définit le terme dN_{coll} qui traite des collisions :

$$dN_{coll} = \left(\frac{dn}{dt} \right)_{coll} (\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{v} \cdot dt \quad [9.8]$$

La conservation du nombre de molécules devient alors :

$$\begin{aligned} dN_{molécules} &= n(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} + \left(\frac{dn}{dt} \right)_{coll} (\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} dt \\ &= n\left(\vec{r} + \vec{v} dt, \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt, t + dt\right) d^3\vec{r} d^3\vec{v} \end{aligned}$$

On sait aussi que :

$$\begin{aligned} &n(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}, t + dt) - n(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ &= [n(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}, t + dt) - n(\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}, t + dt)] \\ &+ [n(\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}, t + dt) - n(\vec{r}, \vec{v}, t + dt)] \\ &+ [n(\vec{r}, \vec{v}, t + dt) - n(\vec{r}, \vec{v}, t)] \\ &= \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \right) (\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}, t + dt) \cdot d\vec{r} + \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{v}} \right) (\vec{r}, \vec{v}, t + dt) \cdot d\vec{v} + \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) (\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot dt \end{aligned}$$

d'où, au premier ordre :

$$n\left(\vec{r} + \vec{v} dt, \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt, t + dt\right) - n(\vec{r}, \vec{v}, t) \approx \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v} dt + \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{v}} \right) \cdot \frac{\vec{F}}{m} dt + \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) \cdot dt$$

Ceci nous permet d'écrire une équation d'évolution de la fonction de distribution n sous la forme :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) + \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \right) + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{v}} \right) = \left(\frac{dn}{dt} \right)_{coll} \quad [9.9]$$

On rappelle que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ est le gradient spatial, aussi noté $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$, qui a pour expression en coordonnées cartésiennes $\frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ et que l'opérateur « gradient dans l'espace des vitesses » $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ est également défini en coordon-

nées cartésiennes par $\vec{\nabla}_{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial v_x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial v_y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial v_z} \vec{u}_z$. Ainsi, cette équation, célèbre sous le nom d'équation de transport de Boltzmann, s'écrit également sous la forme :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} n + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} n = \left(\frac{dn}{dt}\right)_{coll} \tag{9.10}$$

Cette équation traduit donc la conservation du nombre de molécules. On peut remarquer une similarité entre l'équation de transfert radiatif (voir équation [4.135]) et l'équation de transport des particules de Boltzmann : alors que la première est issue d'un bilan d'énergie, la seconde découle d'un bilan qui porte sur le nombre de particules⁵.

d. Fonction de distribution d'équilibre et temps de relaxation

À l'équilibre thermodynamique (pas d'évolution temporelle ni de variation spatiale, ni de force extérieure), on peut calculer la fonction de distribution d'équilibre à partir de l'expression de $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{coll}$, qui est compliquée et n'est donc pas développée ici (voir par exemple [11]). La fonction de distribution d'équilibre, qui est solution de l'équation $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{coll} = 0$, est notée $n^0(\vec{v})$. Lorsque l'on est en présence d'une perturbation qui place le système hors équilibre thermodynamique, la fonction de distribution est notée $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$: elle peut alors dépendre de la position. Si le système n'est pas trop éloigné de l'équilibre, il est utile de considérer l'approximation du temps de relaxation (ou approximation BGK⁶) qui s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{coll} = -\frac{n - n^0}{\tau(\vec{r}, \vec{v}, t)} \tag{9.11}$$

5. On pourrait écrire que la luminance $L(p) = n(p) E(p) v(\vec{p})$, où E est l'énergie d'un porteur de chaleur ($E = \frac{1}{2}mv^2$ pour un porteur de masse m et $E = \hbar\omega$ pour un porteur sans masse tel que le photon, en notant $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ où h est la constante de Planck) et p est le module de la quantité de mouvement ($\vec{p} = \vec{mv}$ pour les molécules et $\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h\omega}{c}$ pour les photons, en notant $k = \frac{\omega}{c}$ le module du vecteur d'onde). Si on intègre [9.10] en l'absence de force externe et en régime stationnaire, en remarquant que $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} = v \frac{d}{ds}$, où s est l'abscisse curviligne, on obtient un bilan d'énergie tel que [4.137], avec une expression pour les effets des interactions.

6. Des noms de Bhatnagar, Gross et Krook.

Cette approximation consiste à dire que la fonction de distribution hors équilibre n retourne vers l'équilibre, décrit par la fonction de distribution d'équilibre n^0 , avec une relaxation exponentielle caractérisée par le *temps de relaxation* τ . En effet, on montre que pour le cas d'un gaz de molécules qui n'est pas soumis à une force extérieure, pour lequel les vitesses sont faibles, et de temps de relaxation uniforme et homogène, pour lequel l'équation de Boltzmann s'écrit $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right) = -\frac{n - n^0}{\tau}$, la fonction de distribution prend la forme $n = n^0 + (n(t=0) - n^0)e^{-t/\tau}$.

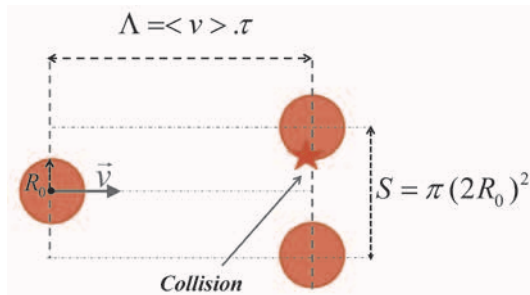


Figure 9.5 La distance parcourue par une molécule modélisée par une sphère dure pendant un temps égal au temps de relaxation permet de déterminer la relation entre densité volumique de molécules et le temps de relaxation.

Le *temps de relaxation* est égal au temps entre deux collisions successives. Dans la suite, on se place dans le cadre de la théorie cinétique des gaz et on considère des sphères dures, pour lesquelles il n'y a pas de déformation et le choc est élastique. La *figure 9.5* montre qu'on a approximativement l'égalité $N^* \left[\pi (2R_0)^2 \right] \Lambda = 1$, où R_0 est le rayon de la molécule et $\Lambda = \langle v \rangle \tau$ est le libre parcours moyen. En effet, la molécule de vitesse \vec{v} ne peut rencontrer qu'une autre molécule pendant le temps τ . En fait \vec{v} est ici la vitesse relative de la molécule par rapport à la molécule partenaire de collision (et non sa vitesse absolue), et on peut montrer plus rigoureusement [7] que l'expression exacte du libre parcours moyen est :

$$\Lambda = \frac{1}{\pi (2R_0)^2} \frac{1}{N^*} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [9.12]$$

1.2.1.2. Gaz de particules sans interaction : distribution d'équilibre et équilibre thermodynamique local (E.T.L.)

a. Distribution d'équilibre

À l'équilibre thermique dans le système, la température T est la même partout. La fonction de distribution d'équilibre, dite de Maxwell, est alors [12 ; 13] :

$$n^0(T, \vec{v}) = N^* \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad [9.13]$$

où N^* est la densité de molécules et k_B la constante de Boltzmann ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$). À l'équilibre, N^* est homogène dans le milieu. On constate que la fonction n^0 « compare » l'énergie cinétique d'une molécule $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ à l'énergie caractéristique $k_B T$. Cette expression de la fonction de distribution d'équilibre est obtenue en physique statistique [8].

b. Énergie cinétique moyenne des molécules à l'équilibre thermique

On calcule l'énergie cinétique moyenne des molécules à l'aide d'une intégrale :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{N^*} \iiint \int_{v_x, v_y, v_z=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}mv^2 \cdot n(T, \vec{v}) \cdot d^3\vec{v} \tag{9.14}$$

À l'équilibre, la fonction de distribution n est n^0 . Il est judicieux de transformer cette intégrale et d'effectuer l'intégration en géométrie sphérique, pour laquelle $d^3\vec{v} = dv \cdot v \cdot d\theta \cdot v \sin\theta \cdot d\varphi$. L'identité :

$$I(k) = \int_0^\infty v^{2k} e^{-av^2} dv = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k - 1)}{2^{k+1} a^k} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{9.15}$$

est appliquée pour $k = 4$ afin de calculer l'intégrale [9.14], et on montre ainsi que :

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \tag{9.16}$$

Le déplacement d'une molécule peut avoir lieu dans les directions x, y et z de manière équiprobable (il n'y a pas de direction privilégiée), et l'expression [9.13] dépend donc de v_x, v_y et v_z de manière identique. On dit qu'il y a équipartition de l'énergie suivant les degrés de translation. On déduit alors de [9.16] qu'il y a une énergie moyenne $\frac{1}{2}k_B T$ par degré de translation. On définit la vitesse quadratique moyenne v_{eff} à l'aide de l'énergie cinétique moyenne :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}mv_{eff}^2 \tag{9.17}$$

d'où :

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \tag{9.18}$$

c. Vitesse moyenne des molécules et analyse de la distribution des vitesses

De même que précédemment, on calcule la vitesse moyenne des molécules

$\langle v \rangle = \frac{1}{N^*} \iiint v \cdot n^0(T, v) \cdot d^3\vec{v}$. Sachant que :

$$J(k) = \int_0^\infty u^{2k+1} e^{-au^2} du = \frac{k!}{2 a^{k+1}} \tag{9.19}$$

on montre que :

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}. \tag{9.20}$$

La fonction de distribution de Maxwell permet également de calculer la vitesse la plus probable (celle pour laquelle la loi de distribution est maximale),

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \text{ et la vitesse moyenne, } \langle v \rangle.$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}} v_{eff} = 0,82 v_{eff} ; \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} v_{eff} = 0,92 v_{eff}.$$

La vitesse moyenne dans une direction fixée, $\langle v_z \rangle$, peut être calculée en projetant la vitesse sur cette direction. On trouve que :

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{1}{N^*} \iiint v \cdot \cos\theta \cdot n^0(T, v) \cdot dv \cdot v \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} v_{eff} = 0,52 v_{eff}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Il est important de noter que $\langle E_c \rangle \neq \frac{1}{2} m \langle v \rangle^2$. Un exemple de la distribution des vitesses est représenté sur la *figure 9.6*.

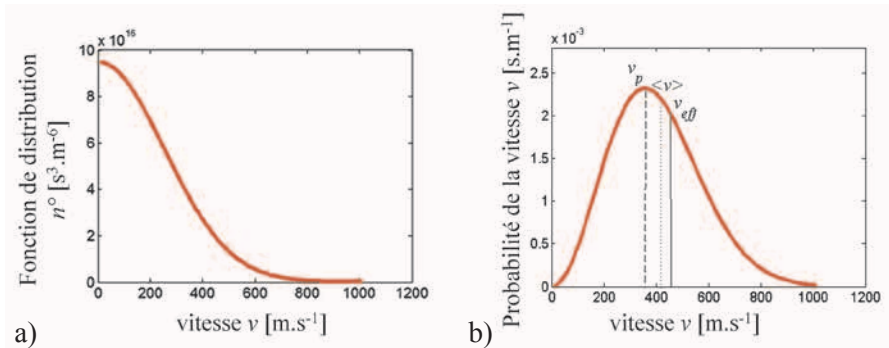


Figure 9.6 (a) Fonction de distribution $n^0(v)$ et (b) probabilité de la vitesse $P_{isotrope}(v) = \frac{n^0(v)}{N^*} 4\pi v^2$ pour un gaz d'argon monoatomique à pression et à température ambiantes.

d. Fonction de distribution à l'équilibre thermodynamique local

Le gaz peut également être hors de l'équilibre. S'il y a *équilibre thermodynamique local* (E.T.L.), qui permet de définir la *température locale* $T(\vec{r}, t)$, on peut alors définir une fonction de distribution d'équilibre *locale* en écrivant que :

$$n^0(\vec{r}, \vec{v}, t) = N^*(\vec{r}, t) \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\vec{r}, t)} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2 k_B T(\vec{r}, t)}} \tag{9.22}$$

qui dépend cette fois-ci de l'espace \vec{r} et du temps t à travers le champ de température, et également *via* la variation de la densité $N^*(\vec{r}, t)$.

1.2.1.3. Conductivité thermique d'un gaz de molécules monoatomiques

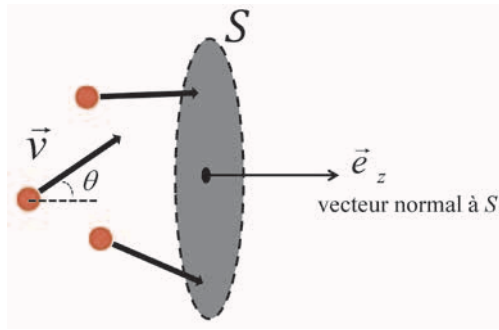


Figure 9.7 Calcul du flux thermique associé aux molécules traversant une surface S.

L'énergie portée par chaque molécule est sa propre énergie cinétique. Le vecteur densité de flux thermique peut être calculé à l'aide de la fonction de distribution hors de l'équilibre $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$:

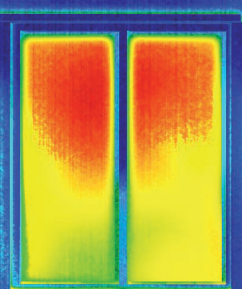
$$\vec{q}'' = \iiint \frac{1}{2} mv^2 \cdot \vec{v} \cdot n(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d^3\vec{v} \tag{9.23}$$

Dans la suite, on calcule le flux thermique $q''_z = \vec{q}'' \cdot \vec{e}_z$ qui traverse une surface S unitaire perpendiculaire à \vec{e}_z :

$$q''_z = \iiint \frac{1}{2} mv^2 \cdot v_z \cdot n(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d^3\vec{v} \tag{9.24}$$

avec $v_z = v \cos\theta$ et toujours $d^3\vec{v} = dv \cdot v \, d\theta \cdot v \sin\theta \, d\varphi$.

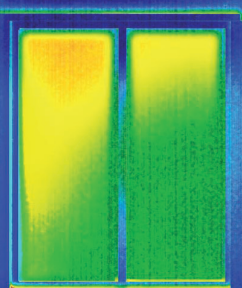
Le flux que nous devons calculer fait intervenir la fonction de distribution hors équilibre : nous allons donc la déterminer à partir de l'équation de Boltzmann dans l'approximation du temps de relaxation (équations [9.10] et [9.11]).



Cet ouvrage est destiné à prendre le relais du livre *Initiation aux transferts thermiques*. Conçu comme un ouvrage de formation continue dans le cadre du Centre d'Actualisation Scientifique et Technique (le CAST, fondu depuis dans INSAVALOR), à l'INSA de Lyon, *Transferts thermiques* demeure le recueil de base pour la formation initiale et continue en thermique d'un très grand nombre d'ingénieurs et de techniciens dans les pays francophones.

Dans la suite du premier, ce nouveau livre est un ouvrage collectif d'enseignants-chercheurs et de chercheurs spécialistes des différents sujets abordés. **La cible de l'ouvrage s'est élargie : aux ingénieurs et techniciens de l'industrie s'ajoutent les chercheurs, la thermique étant désormais reconnue comme un domaine incontournable de la recherche scientifique.** Comprendre la physique des transferts de chaleur, acquérir des outils et des méthodologies pour analyser, modéliser, dimensionner, prédire, en faisant la part toujours belle aux méthodes analytiques, tels sont les objectifs de cet ouvrage.

Transferts thermiques vise non seulement à **guider les débuts dans la thermique**, mais aussi à **aider dans la progression**. Il apporte notamment **une ouverture sur des sujets comme la micro- et nanothermique** ou les **méthodes inverses en thermique**, domaines récents et en constante progression. Le premier ouvre des perspectives prometteuses sur de nouvelles technologies, tandis que le second a redessiné les contours de la métrologie thermique et de la conception des expériences en thermique. L'ouvrage est illustré par de nombreux exemples traités de manière détaillée dans le texte et des exercices avec réponses sont disponibles à la fin de la plupart des chapitres.



Jean-François Sacadura, Professeur émérite des Universités à l'INSA de Lyon, a consacré sa carrière à l'enseignement et à la recherche dans le domaine des transferts de chaleur et de la thermophysique.

Les auteurs sont des enseignants-chercheurs et chercheurs rattachés, ou l'ayant été, au CETHIL, le Centre d'Énergétique et de Thermique de Lyon, et à l'INSA de Lyon, à l'Université Claude Bernard Lyon 1 ou au CNRS. Deux d'entre eux sont depuis à l'Université Savoie - Mont Blanc et dans l'industrie.

