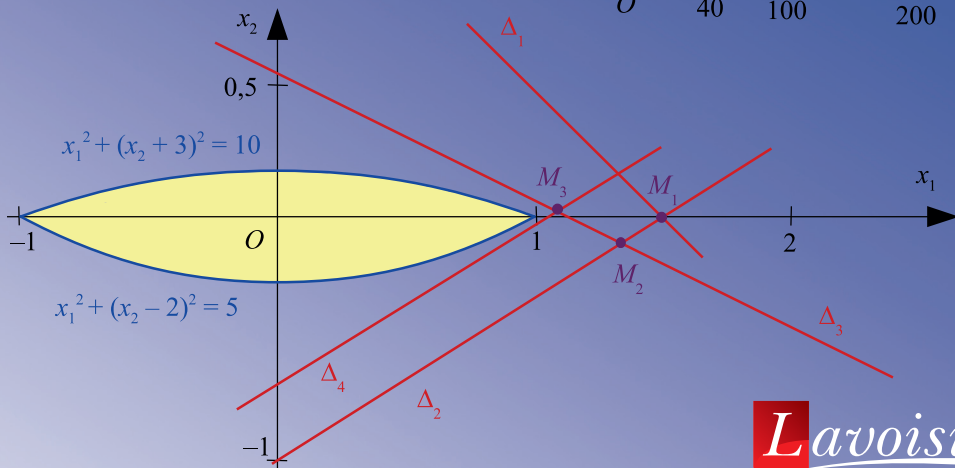
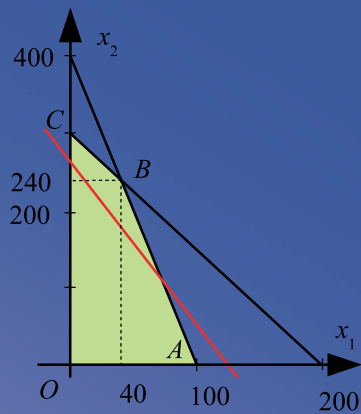
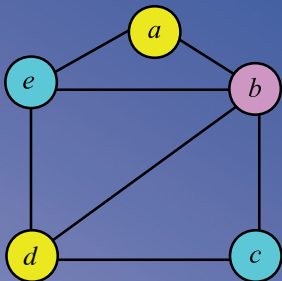


Irène Charon
Olivier Hudry

Introduction à l'optimisation continue et discrète

avec exercices et problèmes corrigés



Collection IRIS
Dirigée par Nicolas Puech

Irène Charon
Olivier Hudry

Introduction à l'optimisation continue et discrète

avec exercices et problèmes corrigés

L*avoisier*
hermes

editions.lavoisier.fr

Direction scientifique : Nicolas Puech
Direction éditoriale : Jean-Marc Bocabeille

© 2019, Lavoisier, Paris
ISBN : 978-2-7462-4863-2

Sommaire

Introduction	9
I Optimisation linéaire	11
1 Optimisation linéaire : l'algorithme du simplexe	13
1.1 Introduction	13
1.2 L'algorithme du simplexe sur un exemple	16
1.3 Définitions et terminologie	19
1.4 Résumé d'une itération	21
1.5 La dégénérescence et le cyclage	22
1.6 Recherche d'un dictionnaire réalisable	25
1.7 Complexité de l'algorithme du simplexe	27
1.8 Exercices	28
2 Forme matricielle de l'algorithme du simplexe	37
2.1 Généralités	37
2.2 Version matricielle d'une itération de l'algorithme du simplexe	38
2.2.1 Recherche d'une variable entrante	39
2.2.2 Recherche d'une variable sortante	39
2.2.3 Actualisation	40
2.2.4 Résumé	40
2.2.5 Exemple	41
2.3 Application au problème de découpe	43
2.4 Exercice	47
3 Dualité en optimisation linéaire	49
3.1 Problème dual	49
3.2 Théorème de la dualité	51
3.3 Le théorème des écarts complémentaires : un certificat d'optimalité	54
3.4 La signification économique du dual	56
3.5 Problème dual-réalisable	59
3.6 Exercices	59

II	Optimisation continue non linéaire	67
4	Optimisation non linéaire sans contrainte	69
4.1	Introduction	69
4.2	Optimisation unidimensionnelle	70
4.2.1	Méthode de Newton	70
4.2.2	Dichotomie pour une fonction dérivable	70
4.2.3	Interpolation quadratique	71
4.2.4	Dichotomie sans dérivation pour une fonction unimodale	72
4.3	Généralités pour l'optimisation multidimensionnelle	72
4.3.1	Notions de topologie	72
4.3.2	Gradient	73
4.3.3	Matrice hessienne	74
4.4	Condition nécessaire et condition suffisante d'optimalité locale	74
4.5	Fonctions convexes	75
4.6	Fonctions quadratiques	76
4.7	Méthodes de descente	77
4.7.1	Généralités	77
4.7.2	Vitesse de convergence	78
4.7.3	Méthodes de gradient	78
4.7.4	Méthode de la plus forte pente à pas fixe	78
4.7.5	Méthode de la plus forte pente à pas optimal	79
4.7.6	Méthode de la plus forte pente accélérée	80
4.8	Méthode des gradients conjugués, méthode de Fletcher et Reeves	80
4.8.1	Cas d'une fonction quadratique	80
4.8.2	Cas d'une fonction quelconque	83
4.9	Méthode de Newton	83
4.10	Exercice	85
5	Optimisation non linéaire avec contraintes	87
5.1	Généralités	87
5.2	Conditions de Lagrange	92
5.3	Conditions de Karush, Kuhn et Tucker	92
5.4	Méthodes de descente	96
5.5	Cas des fonctions convexes	97
5.5.1	Généralités	97
5.5.2	Linéarisation : introduction	98
5.5.3	Linéarisation : méthode de Frank et Wolfe	100
5.5.4	Linéarisation : méthode des plans sécants de Kelley	104
5.6	Exercices	109
6	Relaxation lagrangienne	115
6.1	Définition du problème	115
6.2	Exemple	118
6.3	Résolution du problème dual par génération de contraintes (méthode de Dantzig)	119
6.3.1	Principe de la méthode	119
6.3.2	Maximum du minimum d'une famille de fonctions affines	120

6.3.3	La méthode par génération de contraintes appliquée à l'exemple de la partie 6.2	122
6.4	Résolution du problème dual par une méthode de montée (ou de gradient, méthode d'Uzawa)	125
6.5	Cas des contraintes d'égalité	126
6.6	Exercices	127
III	Problèmes polynomiaux de graphes	137
7	Généralités sur les graphes	139
7.1	Graphes non orientés	139
7.1.1	Notions fondamentales	139
7.1.2	Chaînes et cycles	142
7.1.3	Connexité	146
7.1.4	Arbres	150
7.1.5	Graphes particuliers	151
7.2	Graphes orientés	152
7.2.1	Notions fondamentales	152
7.2.2	Chemins et circuits	156
7.2.3	Forte connexité	157
7.3	Graphes valués	158
7.4	Structures de données pour coder des graphes simples	159
7.4.1	Matrice d'adjacence, matrice des valuations	159
7.4.2	Tableau de listes d'adjacence	160
7.4.3	Choix de la structure de données	161
7.5	Exercices	161
8	Parcours de graphes	165
8.1	Parcours d'un graphe orienté	165
8.1.1	Généralités	165
8.1.2	Parcours utilisant une liste	167
8.1.3	Parcours en largeur (utilisant une file)	168
8.1.4	Parcours en profondeur	169
8.1.5	Numérotations préfixe et postfixe	170
8.2	Cas non orienté	171
8.2.1	Généralités	171
8.2.2	Parcours en largeur (utilisant une file)	172
8.2.3	Parcours en profondeur	172
8.3	Complexité des parcours	173
8.4	Application des parcours	174
8.4.1	Détermination des composantes fortement connexes	174
8.4.2	Détermination des sommets d'articulation d'un graphe non orienté	176
8.4.3	Détermination des composantes 2-connexes d'un graphe non orienté	179
8.5	Exercices	181

9 Plus courts et plus longs chemins	187
9.1 Définition des différents problèmes	187
9.2 Cas des valuations positives	189
9.2.1 Motivation	189
9.2.2 Algorithme de Dijkstra	189
9.3 Cas des graphes sans circuit	193
9.3.1 Numérotation topologique	193
9.3.2 Application : problème d'ordonnancement	194
9.3.3 Algorithme de Bellman	196
9.4 Cas général	198
9.4.1 Motivation	198
9.4.2 Algorithme de Bellman-Ford	199
9.4.3 Algorithme d'amélioration itérative	200
9.4.4 Algorithme de Dantzig	202
9.5 Plus court chemin avec une contrainte	204
9.5.1 Exemple	205
9.6 Exercices	209
10 Arbre couvrant de valuation minimum	221
10.1 Définition du problème	221
10.2 Exemples d'applications	222
10.2.1 Applications en réseaux	222
10.2.2 Une application en traitement d'images	222
10.3 Algorithme de Kruskal	223
10.4 Algorithme de Prim	226
10.5 Exercices	230
11 Flot de valeur maximum et coupe de capacité minimum	233
11.1 Introduction, théorème du flot et de la coupe	233
11.1.1 Introduction	233
11.1.2 Définitions, notations et problèmes	234
11.2 Résultats théoriques	235
11.3 Algorithme de Ford et Fulkerson	237
11.3.1 Chaîne augmentante	237
11.3.2 Description de l'algorithme de Ford et Fulkerson	240
11.3.3 Preuve, convergence et complexité de l'algorithme	242
11.3.4 Exemple d'application de l'algorithme de Ford et Fulkerson	244
11.4 Algorithme de Dinic	246
11.4.1 Graphe d'écart	246
11.4.2 Graphe de couches	247
11.4.3 Description de l'algorithme de Dinic	247
11.5 Flot de valeur maximum à coût minimum : algorithme de Busacker et Gowen	251
11.6 Exercices	254

12 Applications des flots	263
12.1 Détermination des connectivités d'un graphe (théorèmes de Menger)	263
12.1.1 Définition des paramètres de connectivité	263
12.1.2 Forte arc-connectivité d'un graphe orienté	265
12.1.3 Arête-connectivité d'un graphe non orienté	269
12.1.4 Forte sommet-connectivité d'un graphe orienté	270
12.1.5 Sommet-connectivité d'un graphe non orienté	271
12.2 Couplage maximum dans un graphe biparti	272
12.2.1 Un exemple et quelques définitions	272
12.2.2 Modélisation d'un problème d'affectation	272
12.2.3 Traitement de l'exemple de la partie 12.2.1	274
12.3 Un problème de transport	276
12.4 Exercices	278
IV Problèmes difficiles en optimisation discrète	289
13 Complexité des problèmes	291
13.1 Présentation et premières définitions	292
13.1.1 Taille d'une instance	292
13.1.2 Machine de Turing	293
13.1.3 Complexité d'un algorithme	296
13.2 Problème de décision	299
13.2.1 Primalité	299
13.2.2 Le problème de la satisfiabilité	299
13.2.3 Partition	300
13.2.4 Hamiltonisme	300
13.2.5 Problème de décision et problème d'optimisation	301
13.3 Classes \mathcal{P} , \mathcal{NP} , $\text{co-}\mathcal{NP}$; problèmes \mathcal{NP} -complets	303
13.3.1 La classe \mathcal{P}	303
13.3.2 La classe \mathcal{NP}	304
13.3.3 La classe $\text{co-}\mathcal{NP}$	305
13.3.4 Problèmes \mathcal{NP} -complets	306
13.4 Problèmes \mathcal{NP} -difficiles	312
13.4.1 Clique, stable et transversal	312
13.4.2 Optimisation linéaire en nombres entiers	313
13.4.3 Problème du sac à dos	314
13.4.4 Coloration, nombre chromatique	315
13.5 Exercices	316
14 Heuristiques	323
14.1 Une heuristique pour certains problèmes d'optimisation linéaire en nombres entiers	323
14.2 Algorithmes gloutons	324
14.2.1 Méthode gloutonne pour le problème du sac à dos	325
14.2.2 Un algorithme glouton pour la recherche d'un stable de cardinal maximum	325

14.2.3	Un algorithme glouton donnant un majorant du nombre chromatique	326
14.2.4	Un algorithme glouton pour le problème du voyageur de commerce	327
14.3	Méthodes par partitionnement	328
14.4	Méthodes avec garantie de performance	329
14.4.1	Heuristiques avec garantie de performance et problème du voyageur de commerce	330
14.4.2	Rangement unidimensionnel (<i>bin packing</i>)	333
14.5	Exercices	335
15	Métaheuristiques	339
15.1	La fable des randonneurs	339
15.2	Introduction	340
15.3	Principe des méthodes de descente (méthodes d'amélioration itérative)	341
15.3.1	Voisinage d'une solution	341
15.3.2	Quelques transformations et voisinages habituels	342
15.3.3	Exemple : le problème du voyageur de commerce	343
15.3.4	Schéma général d'une descente	343
15.4	Le recuit simulé	345
15.4.1	Une analogie avec la thermodynamique	345
15.4.2	Schéma du recuit simulé	346
15.4.3	Modèles de recuit	348
15.5	La méthode Tabou	351
15.5.1	Principe de la méthode Tabou	351
15.5.2	Amélioration de la méthode Tabou	353
15.6	Algorithmes génétiques	353
15.6.1	Introduction : de la génétique à l'algorithmique	353
15.6.2	Principe des algorithmes génétiques	355
15.6.3	Le codage	356
15.6.4	La sélection	357
15.6.5	Le croisement	358
15.6.6	La mutation	359
15.6.7	La théorie des schémas	360
15.6.8	Application à un problème d'antennes	361
15.6.9	Méthodes hybrides	361
15.7	Autres métaheuristiques	362
15.7.1	Méthodes d'acceptation à seuils	362
15.7.2	Méthodes de bruitage	363
15.7.3	Descentes avec mutations	364
15.7.4	Colonies de fourmis	364
15.7.5	Recherche à voisinages variables	366
15.7.6	Méthode GRASP	366
15.8	Exercices	367

16	Méthodes arborescentes par séparation et évaluation	375
16.1	Description générale d'une méthode arborescente par séparation et évaluation	376
16.1.1	Principe de séparation	376
16.1.2	Borne et fonction d'évaluation	378
16.1.3	Stratégie de développement	380
16.2	Application au problème du sac à dos	382
16.3	Application à l'optimisation linéaire en nombres entiers	385
16.4	Application au problème du voyageur de commerce	387
16.4.1	Définition d'une fonction d'évaluation	387
16.4.2	Description d'une méthode par séparation et évaluation	388
16.4.3	Exemple	390
16.5	Application à la recherche d'un stable de cardinal maximum	393
16.6	Exercices	397
17	Programmation dynamique	403
17.1	Le problème de la partition	403
17.2	Le problème du sac à dos	406
17.3	Recherche du plus long sous-mot commun	407
17.4	Un problème d'entrepôt	410
17.5	Le problème du voyageur de commerce	413
17.6	Exercices	415
V	Problèmes corrigés	419
	Problème 1 : optimisation linéaire, dualité	421
	Problème 2 : optimisation linéaire, relaxation lagrangienne, optimisation non linéaire	431
	Problème 3 : débit d'une chaîne	437
	Problème 4 : arbre couvrant minimum, relaxation lagrangienne	439
	Problème 5 : flot, coupe	447
	Problème 6 : flot et couverture par des chemins	451
	Problème 7 : stable dans un graphe biparti (flot, coupe, complexité)	457
	Problème 8 : complexité de la recherche d'un plus court ou d'un plus long chemin	460
	Problème 9 : relaxation pour le problème du transversal de cardinal maximum	463
	Problème 10 : optimisation linéaire et programmation dynamique	465
	Annexes	470
A	Algorithmes et complexité des algorithmes	471
A.1	Algorithme	471
A.2	Complexité d'un algorithme	472
A.2.1	Opérations élémentaires	472
A.2.2	Complexité en nombre d'opérations élémentaires	473
A.2.3	Notation de Landau : O	474

B	Structures linéaires	475
	B.1 Listes	475
	B.2 Piles	476
	B.3 Files	476
C	Structures arborescentes	477
	C.1 Arbre (général)	477
	C.2 Arbre binaire	478
D	Tas et tri par tas	481
	D.1 Structure de tas	481
	D.2 Tri par tas	483
E	Classes disjointes, algorithme de fusion-appartenance	485
F	Normes vectorielles et matricielles	487
	Bibliographie	489
	Index	491

La Collection **IRIS** est composée d'ouvrages abordant les domaines de l'informatique, des réseaux et des télécommunications. Elle est destinée aux étudiants de l'enseignement supérieur (1^{er}, 2^e et 3^e cycles universitaires, classes préparatoires, écoles d'ingénieurs) ainsi qu'aux professionnels.

Chaque livre de la collection fait le point sur un aspect particulier. Les thèmes sont exposés par des auteurs ayant dispensé un enseignement sur le sujet pendant plusieurs années, ou, dans le cas de concepts émergents, par des chercheurs et des ingénieurs spécialistes du domaine.

L'informatique, les réseaux et les télécommunications constituant un champ scientifique et technologique en perpétuelle évolution, la Collection **IRIS** a pour vocation de clarifier les fondements de ces disciplines en proposant des ouvrages de référence mais aussi en présentant les développements récents à travers des ouvrages plus spécialisés.

Cet ouvrage propose **une introduction aux méthodes d'optimisation** ; il ne nécessite pas de connaissance préalable dans ce domaine. L'optimisation continue et l'optimisation discrète y sont traitées en quatre parties :

- optimisation linéaire (algorithme du simplexe, théorie de la dualité) ;
- optimisation continue non linéaire (avec ou sans contraintes, relaxation lagrangienne) ;
- résolution de problèmes d'optimisation polynomiaux en théorie des graphes (arbres couvrants de poids minimum, plus courts et plus longs chemins, flot maximum et applications des flots) ;
- résolution de problèmes difficiles en optimisation combinatoire (complexité des problèmes, heuristiques et métaheuristiques, méthodes arborescentes par séparation et évaluation, programmation dynamique, applications à des problèmes classiques).

Chaque chapitre contient des exercices et leurs solutions. En outre, une cinquième partie propose des problèmes corrigés ; chacun de ces problèmes implique différents chapitres du livre, pour favoriser une meilleure compréhension des interactions entre ceux-ci. L'accent y est mis en particulier sur la modélisation des problèmes traités.

Cet ouvrage s'adresse, d'une part, aux étudiants de licence et master ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs, d'autre part, aux enseignants, aux chercheurs et aux ingénieurs désireux d'acquérir des connaissances sur ce sujet.

Irène Charon et Olivier Hudry sont respectivement professeur émérite et professeur au département Informatique et réseaux de Télécom ParisTech dans l'équipe « *Mathématiques de l'information, des communications et du calcul* ».

