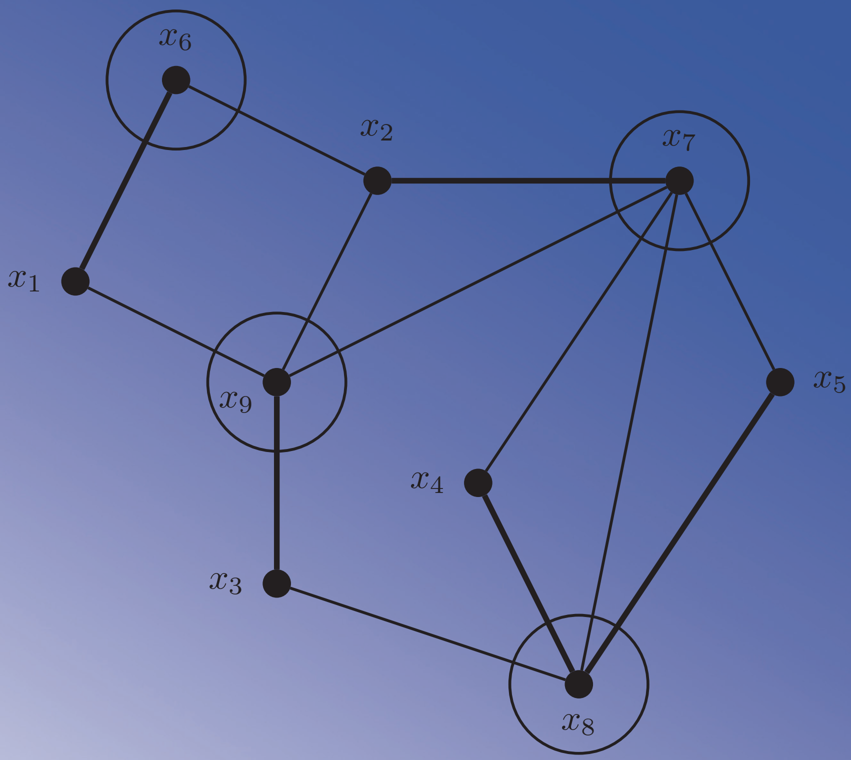
COLLECTION **IRIS**
Sous la direction de **Nicolas Puech**

Alain Bretto
Alain Faisant
François Hennecart

Éléments de théorie des graphes

2e édition revue et augmentée



Lavoisier
Hermes

Collection IRIS
Dirigée par Nicolas Puech

Alain Bretto
Alain Faisant
François Hennecart

Éléments de théorie des graphes

2e édition revue et augmentée

Lavoisier
hermes
editions.lavoisier.fr

Direction scientifique : Nicolas Puech
Direction éditoriale : Jean-Marc Bocabeille

ISBN : 978-2-7462-4850-2

À la mémoire de ma mère,
Alain Bretto

Préface de la deuxième édition

> Avant donc que d'écrire, apprenez à penser.
> Selon que notre idée est plus ou moins obscure,
> L'expression la suit, ou moins nette, ou plus pure.
> Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
> Et les mots pour le dire arrivent aisément.
> (...)
> Hâtez-vous lentement, et, sans perdre courage,
> Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage
> Polissez-le sans cesse et le repolissez ;
> Ajoutez quelquefois, et souvent effacez.
> (...)
> Il faut que chaque chose y soit mise en son lieu ;
> Que le début, la fin, répondent au milieu ;
> Que d'un art délicat les pièces assorties
> N'y forment qu'un seul tout de diverses parties,
> Que jamais du sujet le discours s'écartant
> N'aille chercher trop loin quelque mot éclatant.
>
> BOILEAU, *L'art poétique, chant I* (1674)

Dans cette deuxième édition nous avons entièrement revu le chapitre concernant les algorithmes, en mettant l'accent sur la récursivité. Quelques aménagements, précisions et compléments ont été faits pour les graphes planaires. La théorie spectrale a été considérablement développée, avec notamment l'étude des graphes de CAYLEY. Nous avons ajouté un chapitre sur les graphes aléatoires, et complété par quelques perspectives concernant l'analyse sur graphes.

Les graphes sont des objets très simples et susceptibles de nombreuses variations. Il n'est pas toujours facile d'arbitrer entre la rigueur et l'intuition : ainsi la notion de cycle pourrait être décrite de façon plus précise en introduisant par exemple le sens de parcours, mais cela conduit à alourdir tellement les définitions qu'elles en deviennent inutilisables ! Nous avons donc fait de notre mieux, bien conscients (comme BOILEAU ...) que l'ouvrage n'est pas parfait !

Saint-Étienne, avril 2018, A. Bretto, A. Faisant, F. Hennecart

À propos des auteurs

Alain BRETTO est professeur d'informatique à l'Université de Caen Normandie. Il enseigne également à AgroParisTech et a précédemment enseigné aux États-Unis et en Italie. Ses recherches portent sur la théorie des graphes et des hypergraphes, plus précisément sur leurs aspects algébriques et topologiques. Expert reconnu dans ces domaines, il s'intéresse aussi aux applications des mathématiques : analyse d'images, finance, technologie de l'information.

Alain FAISANT a été maître de conférences en mathématiques à l'Université de Saint-Étienne, où s'est déroulée la majeure partie de sa carrière. Il continue à y développer ses recherches. Ses travaux sont principalement centrés sur la théorie des nombres et il est l'auteur d'un ouvrage qui fait référence sur le sujet : *L'équation diophantienne du second degré* (Hermann, 1991).

François HENNECART est professeur de mathématiques à l'Université de Saint-Étienne, où il développe ses recherches en théorie des nombres. Il s'intéresse plus particulièrement à des problèmes additifs et combinatoires, domaines où les graphes interviennent fréquemment.

Avant-propos à la première édition

En quelques décennies, la théorie des graphes est devenue l'un des domaines les plus féconds et les plus dynamiques des mathématiques et de l'informatique. Cette évolution constante est sans doute due au large spectre des applications telles que l'électronique, la linguistique, la chimie, la sociologie, les mathématiques, l'informatique. . .

Le début a été hésitant : l'histoire veut que la théorie des graphes ait commencé avec l'article du mathématicien suisse Leonhard EULER sur le problème des ponts de Königsberg (voir *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Vol 8 (1736), 128–140).

Néanmoins il faudra attendre deux siècles pour que le premier livre paraisse sur le sujet. Celui-ci a été écrit par Dénes KÖNIG en 1936 (voir *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Teubner, Leipzig, 1936).

Le développement de la théorie des graphes est assez similaire au développement de la théorie des probabilités dont beaucoup de résultats sont dus à l'effort de compréhension des jeux de hasard. Les graphes ont d'abord été considérés comme curiosité mathématique et comme outil pour étudier les jeux logiques : on peut citer par exemple le problème du cavalier du jeu d'échec devant visiter chaque case de l'échiquier exactement une fois tout en revenant à la case de départ. Ils sont devenus maintenant incontournables dans diverses activités humaines. À la suite d'EULER, beaucoup de mathématiciens se sont intéressés aux graphes ; citons en quelques-uns :

– Edouard LUCAS pose le problème des demoiselles : *des jeunes filles, en nombre pair, se promènent chaque jour deux par deux. On demande comment il faut disposer les promenades de sorte que chacune d'entre elles se retrouve une et une fois seulement en compagnie de chacune des autres.*

Nous développons au chapitre 8 les outils qui permettent de résoudre ce type de problème.

– En 1856, William R. HAMILTON étudie un problème apparemment aussi simple, celui de trouver un chemin passant une fois et une seule par chaque sommet d'un graphe. Cela donnera naissance au concept de graphe hamiltonien (voir chapitre 2).
– Arthur CAYLEY, James J. SYLVESTER puis George PÓLYA développent la notion d'arbre (voir chapitre 2).
– En 1840, August F. MÖBIUS propose le problème suivant : *un roi a cinq fils et souhaite qu'à sa mort son royaume soit divisé en cinq provinces de telle sorte que chaque province ait une frontière commune avec chacune des autres.*
  Cela revient à décider si le graphe K_5 est planaire. Nous aborderons la notion de graphe planaire au chapitre 5.

Cette théorie permet de représenter un ensemble complexe d'objets en exprimant les relations entre les éléments ; par exemple réseaux de communication, génétique, circuits électriques, mais également en mathématiques : la classification des groupes simples finis fait appel aux graphes par l'intermédiaire des cartes et des dessins d'enfant (redécouverts en 1984 par Alexandre GROTHENDIECK dans *Esquisse d'un programme*). Il faudra néanmoins attendre le milieu du XX[e] siècle pour qu'une étude systématique soit entreprise. Aujourd'hui c'est une théorie *foisonnante* aux frontières de domaines plus classiques tels que la topologie, l'algèbre, la géométrie, l'algorithmique et ses applications. Son langage et ses notations ne sont pas encore stabilisés et sont parfois liés au domaine dans lequel la théorie des graphes est employée.

Nous avons essayé dans cet ouvrage d'unifier les définitions et les résultats, et de les placer dans le cadre le plus général possible. Cependant il n'est pas facile d'avoir le même langage pour les graphes simples, les multigraphes, les graphes orientés (ou digraphes)... Le contenu n'est pas standard (bien que beaucoup de chapitres traitent d'éléments classiques) au sens d'une introduction habituelle aux graphes. Nous avons insisté sur l'aspect algébrique et topologique, mais également sur les derniers développements de la théorie (notamment les aspects spectraux, voir chapitre 9). Afin de rendre le lecteur autonome, nous avons volontairement détaillé les preuves et introduit des rappels tout au long de l'ouvrage. Certains chapitres et paragraphes de ce livre ne sont pas faciles et peuvent être omis en première lecture. Néanmoins le but affirmé de ce livre est d'emmener le lecteur au seuil de la recherche.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les graphes et le langage de base. Certaines notions élémentaires sur la complexité algorithmique sont également abordées ; les deux derniers paragraphes sont d'un niveau un peu plus élevé et peuvent être ignorés lors d'une première lecture.

Le deuxième chapitre a pour objet l'introduction de différentes classes de graphes (graphes bipartis, arbres, arborescences...). Les derniers paragraphes traitent des graphes eulériens et hamiltoniens.

Dans le chapitre trois, nous étudions les relations entre les graphes et les structures de données algorithmiques. De manière plus précise, nous montrons que la notion de graphe est fondamentale quand on veut représenter des données informatiques. Des notions telles que les arbres binaires de recherche, les arbres de priorité, les tas... sont abordés. Ce chapitre est un cours classique d'algorithmique et de structures de données généralement étudié en première et deuxième années de licence d'informatique.

Ces trois chapitres n'utilisent aucun concept difficile et peuvent être lus par un étudiant ayant le niveau d'un baccalauréat scientifique : ils nécessitent cependant quelques compléments sur des structures mathématiques généralement abordées en début d'études supérieures, qui sont introduits au cours du texte.

Le chapitre quatre, qui introduit la connexité et les flots, bien que n'utilisant aucune notion difficile, est un peu plus théorique. Néanmoins il peut être lu par une personne ayant un niveau licence première et deuxième années en mathématiques ou informatique.

Le chapitre cinq traite de la notion de planarité et ne peut être abordé que par un lecteur ayant de bonnes notions sur la topologie du plan. Nous avons développé en annexe des éléments de cette topologie ; une preuve explicite détaillée du théorème de Jordan, version polygonale, est également donnée.

Au chapitre six, les aspects algébriques (élémentaires) de la théorie des graphes sont étudiés. Ce chapitre ne présente pas vraiment de difficultés pour un étudiant de licence de mathématiques ou informatique première ou deuxième année.

Les chapitres sept et huit introduisent les colorations et les couplages de graphes. Certains théorèmes sont assez difficiles et peuvent être négligés lors d'une première lecture.

Le chapitre neuf aborde la théorie spectrale des graphes (avatar plus récent de la théorie des graphes) et demande des connaissances plus élaborées en algèbre (niveau milieu de licence de mathématiques).

Le dernier chapitre n'utilise pas d'outils très profonds mais les concepts manipulés et les résultats démontrés sont assez abstraits. Il est donc conseillé seulement en deuxième lecture.

On trouvera une courte liste de textes classiques sur les graphes à la fin de l'ouvrage. Par commodité nous avons mentionné en note de bas de page les quelques références utilisées dans l'exposé.

Caen, Saint-Étienne, juillet 2011, A. Bretto, A. Faisant, F. Hennecart

Sommaire

COLLECTION **IRIS**
Sous la direction de **Nicolas Puech**

La Collection **IRIS** est composée d'ouvrages abordant les domaines de l'informatique, des réseaux et des télécommunications. Elle est destinée aux étudiants de l'enseignement supérieur (1er, 2e et 3e cycles universitaires, classes préparatoires, écoles d'ingénieurs) ainsi qu'aux professionnels.

Chaque livre de la collection fait le point sur un aspect particulier. Les thèmes sont exposés par des auteurs ayant dispensé un enseignement sur le sujet pendant plusieurs années, ou, dans le cas de concepts émergents, par des chercheurs et des ingénieurs spécialistes du domaine.

L'informatique, les réseaux et les télécommunications constituant un champ scientifique et technologique en perpétuelle évolution, la Collection **IRIS** a pour vocation de clarifier les fondements de ces disciplines en proposant des ouvrages de référence mais aussi en présentant les développements récents à travers des ouvrages plus spécialisés.

Cet ouvrage est une introduction à la théorie des graphes. La plupart des notions élémentaires et classiques y sont introduites selon une approche originale, précise et rigoureuse. Ainsi les résultats énoncés font l'objet, dans leur quasi-totalité, de démonstrations détaillées.

L'aspect topologique et l'aspect algébrique, derniers avatars de cette théorie, ont été développés de manière approfondie. La variété des thèmes abordés a pour objectif de conduire le lecteur à appréhender les graphes dans leur plus grande diversité afin d'en percevoir la puissance en tant qu'outil mathématique. L'accent a également été mis sur l'algorithmique des graphes, qui se prêtent particulièrement bien aux structures de données et à la programmation.

Cette deuxième édition propose une présentation plus complète des graphes planaires et de la théorie spectrale. On y trouve aussi un nouveau chapitre sur les graphes aléatoires et quelques éléments d'analyse sur graphes.

Ce livre peut être d'usage courant pour les étudiants en informatique et en mathématiques du niveau licence mais il s'adresse également aux étudiants de master ainsi qu'aux élèves ingénieurs. Il pourra aussi être utile à des étudiants doctorants et à des chercheurs confirmés voulant en savoir plus sur ce domaine.

Alain Bretto *est professeur d'informatique à l'Université de Caen Normandie.*

Alain Faisant *est maître de conférences émérite de mathématiques à l'Université Jean Monnet, Saint-Étienne.*

François Hennecart *est professeur de mathématiques à l'Université Jean Monnet, Saint-Étienne.*

editions.lavoisier.fr

978-2-7462-4850-2