

Classes Prépas Scientifiques *Le tout-en-1*

Jean-Claude Martin
Alexandre Reissman
Marc Tenti
Jean-Luc Clabecq
Hervé Guillaumie

**BCPST
VÉTO 2**

MATHÉMATIQUES

Nouvelle
édition

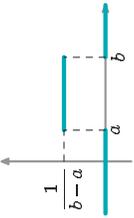
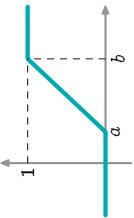
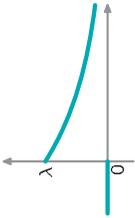
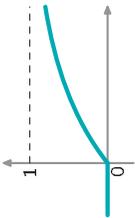
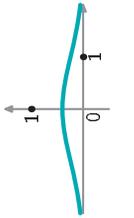
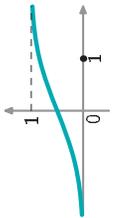
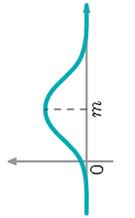
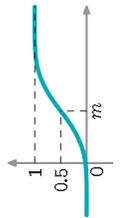
**TRAVAILLER efficacement
RÉUSSIR les concours**

- La synthèse du cours
- Des conseils méthodologiques
- Des exercices et annales corrigés

**Annales
2015 - 2016**

L*avoisier*
TEC & DOC

Variables aléatoires à densité usuelles

Loi	Fonction de densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance	Courbe : densité	Courbe : fonction de répartition
Uniforme $\mathcal{U}([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$		
Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$	$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	0	1		
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ ($\sigma > 0$)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	m	σ^2		

Classes Prépas Scientifiques *Le tout-en-1*

Mathématiques

BCPST-VÉTO

2^e année

Classes Prépas Scientifiques *Le tout-en-1*

Un ouvrage par matière et par année comprenant :

⇒ *Une partie Capacités exigibles*

- Le **cours en questions** : pour retenir les points fondamentaux sous forme résumée
- Les **savoir-faire clés** : pour acquérir les méthodes de résolution

⇒ *Une partie Concours*

- **Pour maîtriser les bases** : pour mettre en pratique les repères précédemment acquis dans des exercices et problèmes de concours
- **Pour approfondir** : pour se mettre en situation de concours avec des sujets récents d'un plus haut niveau

Pour les étudiants de la filière BCPST-VÉTO

PHYSIQUE

- **Physique BCPST-VÉTO 1**, S. Baude et P. Grécias
- **Physique BCPST-VÉTO 2**, S. Baude et P. Grécias

CHIMIE

- **Chimie BCPST-VÉTO 1**, P. Grécias, S. Rédoglia et V. Tejedor
- **Chimie BCPST-VÉTO 2**, P. Grécias et S. Rédoglia

MATHÉMATIQUES

- **Mathématiques BCPST-VÉTO 1**, J.-C. Martin, C. Bièche, J.-L. Clabecq, H. Guillaumie, M. Halberstadt, F. Raccaglia, A. Reissman, C. Schreiber et M. Tenti
- **Mathématiques BCPST-VÉTO 2**, J.-C. Martin, A. Reissman, H. Guillaumie, J.-L. Clabecq et M. Tenti

BIOLOGIE-GÉOLOGIE

- **Biologie-Géologie BCPST-VÉTO 1**, J. Denoeud, C. Godinot, O. Guipponi, H. Moreau, M. Paulhiac-Pison et F. Tejedor
- **Biologie-Géologie BCPST-VÉTO 2**, J. Denoeud, C. Godinot, O. Guipponi, H. Moreau, M. Paulhiac-Pison, M.-L. Pons et F. Tejedor

Pour plus d'informations sur nos publications :



newsletters.lavoisier.fr/9782743022952

Mathématiques

BCPST-VÉTO

2^e année

Capacités exigibles et Concours

Jean-Luc CLABECQ

*Professeur agrégé
Lycée Thiers, Marseille*

Hervé GUILLAUMIE

*Professeur de chaire supérieure
Spé PSI*
Lycée Roosevelt, Reims*

Alexandre REISSMAN

*Professeur de chaire supérieure
Spé BCPST-VÉTO
Lycée Thiers, Marseille*

Jean-Claude MARTIN

*Professeur de chaire supérieure
Spé PC*
Lycée Thiers, Marseille*

Marc TENTI

*Professeur agrégé
Sup TSI
Lycée Le Corbusier, Aubervilliers*

Fenêtre sur les concours actuels

Alexandre REISSMAN

*Professeur de chaire supérieure
Spé BCPST-VÉTO
Lycée Thiers, Marseille*

Lavoisier
TEC & DOC

editions.lavoisier.fr

Direction éditoriale : Fabienne Roulleaux
Édition : Laurence Sourdillon et Élodie Lecoquerre
Couverture et maquette intérieure : Isabelle Godenèche
Fabrication : Estelle Perez
Composition et illustrations : STDI, Lassay-les-Châteaux

© 2017, Lavoisier, Paris

ISBN : 978-2-7430-2295-2

Avant-propos

Chers étudiants,

■ Cet ouvrage fait partie de la **nouvelle collection « Classes Prépas Scientifiques », Le tout-en-1**, couvrant l'ensemble des classes préparatoires aux Grandes écoles scientifiques, et se donnant pour but de répondre à vos besoins en mathématiques, physique, chimie et biologie-géologie pour toute CPGE, **par une approche novatrice**.

**Réduire le fossé ressenti entre
« suivre un cours » et « passer une épreuve de concours ».**

■ La principale nouveauté des programmes officiels 2013/2014 est de fixer un **socle de connaissances** traduit par des **capacités exigibles** au niveau des concours.

L'étudiant doit acquérir une certaine autonomie dans sa progression vers les concours, aussi bien sur le plan théorique (**résolution de problèmes, approche documentaire**) que sur le plan expérimental (**compétences expérimentales**).

■ La structure de chaque ouvrage de cette nouvelle collection répond donc à un double objectif :

- **Vous aider à bien cerner les capacités exigibles**

La rubrique **Le cours en questions** met l'accent sur les notions de base favorisant ainsi l'apprentissage et la compréhension en profondeur du cours. Elle n'a néanmoins pas vocation à se substituer à un ouvrage de cours traditionnel. Sous forme de questions ponctuelles interactives, cette partie vous permet de *réfléchir et de mémoriser les fondamentaux*.

La rubrique **Les savoir-faire clés** structure les compétences à acquérir autour de quelques démarches fondamentales. Sous forme d'exercices soigneusement sélectionnés, cette partie vous permet de *comprendre les stratégies de résolution et de créer des réflexes méthodologiques essentiels*. Tous les corrigés sont agrémentés de nombreuses aides ponctuelles du type Conseils méthodologiques, Erreurs à éviter, Éléments à mémoriser, Techniques de calculs...

- **Vous préparer efficacement aux concours**

La rubrique **Pour maîtriser les bases** vous permet de vous entraîner sur des exercices et problèmes de concours très classiques, en utilisant les repères précédemment acquis. Cette partie propose des solutions totalement rédigées qui viennent *asseoir définitivement vos connaissances*. Nous avons soit utilisé des extraits récents des écrits ou oraux des concours toujours conformes au nouveau programme, soit créé de nouveaux exercices dans ce nouvel esprit.

La rubrique **Pour approfondir** vous propose d'accéder à un plus haut niveau ou de vous confronter simplement à des situations nouvelles. Sous forme de textes de concours (des écrits ou des oraux) plus ouverts, cette partie nécessite souvent plus de réflexion, plus d'initiative, plus d'esprit critique, et *développe vos facultés d'adaptation ultérieures*.

■ **Cet ouvrage est un guide de travail complet** qui doit vous accompagner tout au long de votre année de prépa et vous permettre de passer de **l'apprentissage à l'autonomie** :

- **apprentissage** pour préparer vos colles et vos devoirs surveillés avec un découpage progressif selon l'avancement de votre cours ;
- **autonomie** avec des sujets plus ambitieux en cours d'année et, en fin d'ouvrage, un dernier chapitre proposant des sujets très récents plurithématiques ou spécialement créés dans l'esprit du nouveau programme : **Fenêtre sur les concours actuels**. C'est désormais l'occasion de mettre en œuvre tous vos acquis.

■ **Vous trouverez dans Le tout-en-1 Mathématiques BCPST-VÉTO 2** les thèmes **couvrant la totalité du programme de mathématiques de votre filière**.

En conclusion, nous souhaitons vous remercier pour avoir choisi ce livre, et nous espérons qu'il vous apportera toute l'aide efficace souhaitée.

Il reste sans doute de nombreuses imperfections et nous vous serions reconnaissants de nous faire part de vos critiques et suggestions.

Les auteurs

Notations

La nature des textes insérés en marge ou décrochement est précisée par l'un des trois logos suivants :



: résultat important (à mémoriser) ou remarque importante.



: conseil méthodologique ou commentaire sur le contenu d'un exercice.



: erreur à éviter.

Table des matières

	Avant-propos	V
Chapitre 1	Séries	
	Capacités exigibles	1
	Concours	10
Chapitre 2	Intégrales généralisées	
	Capacités exigibles	15
	Concours	25
Chapitre 3	Fonctions numériques de plusieurs variables réelles	
	Capacités exigibles	33
	Concours	46
Chapitre 4	Espaces vectoriels	
	Capacités exigibles	55
	Concours	75
Chapitre 5	Applications linéaires et matrices	
	Capacités exigibles	83
	Concours	97
Chapitre 6	Réduction des endomorphismes et des matrices	
	Capacités exigibles	117
	Concours	134
Chapitre 7	Produit scalaire dans \mathbb{R}^n	
	Capacités exigibles	149
	Concours	161
Chapitre 8	Compléments de probabilités	
	Capacités exigibles	169
	Concours	177
Chapitre 9	Variables aléatoires discrètes	
	Capacités exigibles	191
	Concours	203
Chapitre 10	Couples de variables aléatoires discrètes	
	Capacités exigibles	217
	Concours	233

Chapitre 11	Variables aléatoires à densité	
	Capacités exigibles	257
	Concours	279
Chapitre 12	Théorèmes limites et statistiques inférentielles	
	Capacités exigibles	307
	Concours	317
Chapitre 13	Fenêtre sur les concours actuels	325
	Index	371

Variables aléatoires discrètes usuelles

Nom Notation	Univers	Loi	Espérance	Variance	Modèles Propriétés
Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ $\mathcal{U}(n)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$	$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$	Choix d'un entier « au hasard » entre 1 et n .
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ $P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$V(X) = pq$	Succès/échec lors d'une épreuve n'ayant que ces deux issues.
Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$\llbracket \max(0, n-Nq), \min(n, Np) \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$ (ce résultat n'est pas à connaître)	Loi du nombre de boules rouges obtenues lors de n tirages successifs et sans remise de boule (ou tirage simultané de n boules) dans une urne contenant initialement Np boules rouges et Nq boules blanches.
Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$	Nombre de succès lors d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{q}{p^2}$	Numéro de l'épreuve amenant le premier succès lors d'une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$	Loi des événements rares et limite dans certaines conditions de lois binomiales.

Notations : $n \in \mathbb{N}^*, N \in \mathbb{N}^*, n \leq N, p \in]0, 1[, q = 1 - p, Np \in \mathbb{N}^*, \lambda > 0, k \in X(\Omega)$.

Le tout-en-1

MATHÉMATIQUES

Retrouvez dans cet ouvrage :

- **La synthèse du cours**
Pour apprendre et comprendre, sous forme résumée, **les points fondamentaux à retenir.**
- **Des savoir-faire clés et conseils méthodologiques**
Pour acquérir plus d'efficacité dans votre travail.
- **Des exercices et annales corrigés**
Des sujets **découpés par chapitre**, exploitables au fur et à mesure de l'année, ainsi que les **annales complètes** des nouveaux programmes.

Conformes aux nouveaux programmes, les ouvrages de la collection s'appuient sur une équipe d'auteurs expérimentés, professeurs de classes préparatoires et membres des jurys de concours sachant conjuguer rigueur et efficacité.

Également disponibles pour votre filière :

Physique – Chimie – Biologie-Géologie

prepas.lavoisier.fr

editions.lavoisier.fr



978-2-7430-2295-2