

L'analyse dimensionnelle : un outil pour conduire des changements d'échelle raisonnés

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer la plus-value de l'analyse dimensionnelle pour transposer des résultats d'une échelle à une autre, notamment :

– pour reproduire un procédé étudié à petite échelle (maquette) à l'identique à l'échelle industrielle (prototype) : on procède alors à un agrandissement (*scale-up*) ;

– pour prédire le comportement d'un procédé à l'échelle industrielle (prototype) à l'aide d'essais conduits sur un équipement de taille réduite (maquette) ; on procède alors à une réduction (*scale-down*).

À cette fin, nous allons :

– tout d'abord énoncer le principe et les règles découlant de l'analyse dimensionnelle à respecter afin de réussir le changement d'échelle d'un procédé (paragraphe 1) ;

– puis illustrer comment appliquer ces règles au travers de plusieurs exemples guidés (paragraphe 2 à 5).

1. Conditions à satisfaire pour assurer une similitude complète à deux échelles : conservation du point de fonctionnement

1.1. Configuration du système et points de fonctionnement

D'après le théorème de Vaschy-Buckingham (voir chapitre 2, paragraphe 1.3.3), toute grandeur physique représentant un phénomène (c'est-à-dire toute variable cible V_1 ou V_{cible}) fonction de m grandeurs physiques indépendantes, V_p , mesurées par n_d dimensions fondamentales, peut être décrite par une fonction implicite entre $m-n_d$ nombres sans dimension π_i :

$$V_{cible} = V_1 = f(V_2, V_3, V_4, \dots, V_m) \quad [5. 1]$$

devient ainsi :

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots, \pi_{m-n_d}) \quad [5. 2]$$

Nous avons vu que l'ensemble de ces nombres sans dimension $\{\pi_i\}$ sont des rapports adimensionnels de grandeurs physiques qui conditionnent les évolutions du système. Ils s'expriment selon des produits distincts des puissances des grandeurs physiques :

$$\pi_i = \frac{V_i}{\prod_k V_k^{a_{ik}}} \quad [5.3]$$

où les exposants a_{ik} sont des nombres rationnels pouvant être nuls, $i \in [1; m - n_d]$ et $k \in [m - n_d + 1; m]$.

Plus précisément, ils sont obtenus en divisant chaque variable physique non répétée par un produit de variables répétées élevées à différents exposants a_{ik} (équation 2.13) : ils représentent donc des **mesures internes** des variables physiques non répétées dans la base constituée par les variables physiques répétées. Par construction, ces mesures internes ne dépendent ainsi plus des unités (ou étalons) externes employées pour mesurer les grandeurs physiques.

Il est important de comprendre que chaque mesure interne, π_j (avec $j > 1$), caractérise l'une des causes potentielles à l'origine de la variation de la mesure interne cible, π_{cible} . Elles présentent diverses significations physiques selon l'analyse que l'on en fait (voir annexe 1) : par exemple, des rapports de forces, d'échelle de temps, de longueur, ...

Dans le chapitre 2 (paragraphe 3.1), nous avons nommé **configuration du système** le jeu complet de mesures internes, $\{\pi_j \text{ avec } \pi_j \neq \pi_{cible}\}$, responsables des variations de la mesure interne cible. Le nombre $(m - n_d - 1)$ de mesures internes constituant la configuration est fonction, comme nous le verrons dans les chapitres 6, 7 et 8, de la complexité du système analysé.

À cette expression littérale définissant la configuration du système, est associé un ensemble de valeurs numériques, appelés **points de fonctionnement**. Effectivement, selon la valeur numérique prise par les (ou imposée aux) grandeurs physiques dimensionnelles V_i intervenant dans les mesures internes π_j (avec $j > 1$), les π_j prennent différentes valeurs numériques. Un point de fonctionnement est donc une collection ordonnée de valeurs numériques (voir chapitre 2, paragraphe 3.2.4).

Cette notion de point de fonctionnement est d'autant plus essentielle qu'à chaque point de fonctionnement est associée une évolution ou une variation physique du système, et donc de la variable cible.

1.2. Règles de similitude

1.2.1. Notion de similitude complète

Garantir l'unicité des mécanismes à deux échelles (maquette et prototype) nécessite que la configuration des deux systèmes soit constituée des mêmes mesures internes conditionnant l'évolution de la mesure interne cible, π_{cible} , et que la valeur de toutes ces mesures internes (c'est-à-dire les points de fonctionnements des deux systèmes) soient identiques.

Dans ce cas, on est en présence d'une **similitude complète ou totale**.

En d'autres termes, ceci signifie que, pour que π_{cible} reste inchangé à deux échelles différentes, il faut s'assurer que chacune des mesures internes $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-n_d}$, des deux systèmes prenne simultanément la même valeur aux deux échelles.

Ces conditions se formalisent par des **relations de similitude** qui s'expriment classiquement sous la forme :

$$\text{Si :} \quad \forall j > 1, \quad (\pi_j)_{maquette} = (\pi_j)_{prototype} = \text{idem} , \quad [5.4]$$

$$\text{Alors :} \quad (\pi_{cible})_{maquette} = (\pi_{cible})_{prototype} = \text{idem} . \quad [5.5]$$

1.2.2. Notion de similitude partielle

La notion de similitude complète telle qu'elle vient d'être définie induit naturellement la question suivante : est-il toujours possible d'obtenir une similitude complète entre l'espace des nombres sans dimension sur maquette et sur prototype ?

Signalons d'emblée qu'il est fort possible qu'une maquette de laboratoire ne convienne pas pour simuler un point de fonctionnement. Effectivement, lorsqu'on fixe la taille d'une maquette, il y a des cas où on n'a pas assez de degrés de liberté (en jouant sur les conditions opératoires et propriétés des matières du système) pour obtenir simultanément les mêmes valeurs numériques des mesures internes aux échelles de la maquette et du prototype.

Ainsi, si au moins une des valeurs numériques des mesures internes n'est pas rigoureusement identique aux deux échelles, les conditions de similitude totale ne sont plus réunies : on parle dans ce cas de **similitude partielle**. Dans cette situation, on ne peut plus garantir que l'évolution de la mesure interne cible, π_{cible} , sera identique aux deux échelles. Il sera alors nécessaire d'évaluer si la non-conservation des valeurs numériques de ces mesures internes a une influence majeure sur π_{cible} ou non.

On comprend bien que les conditions de similitude totale deviennent de plus en plus difficiles à garantir au fur et à mesure que le nombre de grandeurs physiques nécessaire à la description du système augmente. Néanmoins, l'établissement des nombres sans dimension et la représentation graphique de la configuration du système procure dans tous les cas un outil pour :

- comparer les différents points de fonctionnement d'un système ayant conduit à des évolutions différentes de la variable cible ;
- mieux cerner la contribution de chaque mesure interne à l'évolution physique du système. Ce n'est qu'ensuite, *via* la détermination de la relation de procédé, que l'influence spécifique de chaque mesure interne sur l'évolution de la variable cible pourra être quantifiée.

Le principe de similitude impose donc à tout expérimentateur utilisant des maquettes de formaliser le problème en termes de nombres sans dimension afin d'être capable d'identifier la configuration du système et de pouvoir espérer transposer les résultats obtenus à une autre échelle.

Reformuler un problème physique en établissant les nombres sans dimension le gouvernant, c'est donc se placer dans le cadre théorique rigoureux qui permet de statuer de façon raisonnée (c'est-à-dire en situant les points de fonctionnement les uns par rapport aux autres) sur l'identité des mécanismes gouvernant l'évolution de la variable cible dans deux procédés de tailles différentes.

1.2.3. Apport de la connaissance de la relation de procédé pour le changement d'échelle

Comme nous le verrons dans les chapitres 6, 7 et 8, l'analyse dimensionnelle, combinée à des essais sur maquette, permet de déterminer la relation de procédé liant la mesure interne cible aux autres grandeurs physiques.

Pour transposer un résultat d'une échelle à l'autre, la connaissance d'une telle relation n'est pas utile quand on est en présence d'une similitude complète.

Tel n'est pas le cas en présence d'une similitude partielle. En effet, la relation de procédé permet alors de définir les lois d'échelle à respecter et de proposer un nouveau point de fonctionnement pour atteindre le résultat escompté à l'échelle visée. Cependant, comme l'intégralité des valeurs des nombres sans dimension entrant dans une configuration ne restent pas inchangées entre la maquette et le prototype, il faut s'assurer que la relation de procédé utilisée pour proposer un nouveau point de fonctionnement a bien été établie avec des expériences intégrant ce nouveau point de fonctionnement ; si la plage de validité de la relation de procédé n'est malheureusement pas assez large, des mesures avec différentes tailles de maquette doivent être réalisées pour s'assurer que les mesures internes non conservées ont peu d'influence sur le procédé.

Nous reviendrons sur ces différents points au gré des exemples guidés n° 5 et 6.

1.2.4. Les différents types de similitude

À partir de l'équation 5.4, on a coutume, pour jauger le degré de similitude entre deux systèmes, de définir différents types de similitudes. En premier lieu, on définit généralement la similitude géométrique, très utilisée en particulier pour la conception de maquette de laboratoire.

On parle de **similitude géométrique** quand il y a identité de l'échelle des distances l_i en tout point et dans toutes les directions du prototype et de la maquette considérés. On introduit alors un **facteur d'échelle** entre le prototype industriel et la maquette de laboratoire, noté F_e et défini selon :

$$\forall i, F_e = \frac{(l_i)_{\text{prototype}}}{(l_i)_{\text{maquette}}} \quad [5.6]$$

où l_i représente les longueurs caractéristiques correspondantes du prototype ou de la maquette permettant de définir la géométrie aux deux échelles.

Notons que ce que nous appelons **maquette de laboratoire** est un équipement représentatif de l'installation ou du procédé industriel, appelé **prototype**. Généralement d'échelle réduite, elle est idéalement similaire géométriquement au prototype, mais ce n'est pas toujours vrai ou toujours possible.

Par analogie au facteur d'échelle F_e caractéristique de la similitude géométrique, il est intéressant de remarquer que, lorsque l'on exige que des mesures internes, rapports de différentes grandeurs physiques telles que des forces, soient simultanément les mêmes dans la maquette et le prototype (équation 5.4), alors l'ensemble des grandeurs physiques de même nature mises en jeu dans la définition du problème respectent le même **facteur d'échelle**, noté λ^1 . La démonstration de cette affirmation est présentée en annexe 7. C'est une condition très exigeante car les forces peuvent être de nature très différente, à l'image des forces d'inertie, des forces dues à la gravité, des forces visqueuses, des forces de tension superficielle ou des forces de pression. De fait, cette condition est hors de portée dès lors que les forces qui conditionnent l'évolution d'un système sont de nature trop diverse : on doit renoncer alors à atteindre la similitude totale. Dans ce cas, on essaie de conserver une similitude partielle portant sur les nombres sans dimension dont l'effet est prépondérant.

Outre la similitude géométrique, les similitudes suivantes sont classiquement distinguées en génie des procédés :

- la **similitude mécanique**, incluant la similitude statique, la similitude cinématique et la similitude dynamique.

1. Il est noté pour le différencier du facteur d'échelle associé à la similitude géométrique F_e .

Le principe de *similitude statique* peut s'énoncer ainsi : deux corps solides géométriquement similaires, sont statiquement similaires s'ils restent géométriquement similaires lorsqu'ils sont soumis à des forces constantes.

La *similitude cinématique* existe quand, au sein de deux systèmes géométriquement similaires, les vitesses en tout point du système sont dans un rapport constant.

De même, la *similitude dynamique* existe dans deux systèmes géométriquement similaires quand les forces en tout point du système sont dans un rapport constant ;

– la **similitude thermique** : deux systèmes, géométriquement similaires, sont thermiquement similaires lorsque les différences de températures correspondantes restent dans un rapport constant, et s'ils sont dynamiquement similaires lorsqu'ils sont en mouvement.

– la **similitude chimique** : deux systèmes, géométriquement et thermiquement similaires, sont chimiquement similaires lorsque les différences de concentrations correspondantes restent dans un rapport constant, et s'ils sont dynamiquement similaires lorsqu'ils sont en mouvement.

Deux autres similitudes peuvent se rencontrer dans des cas particuliers, le plus souvent dans le calcul des réacteurs chimiques :

- la **similitude lumineuse** (réacteurs photochimiques) ;
- la **similitude électrique** (réacteurs électrochimiques)

Enfin, nous verrons, dans la dernière section de ce chapitre, qu'un dernier type de similitude existe : la **similitude matériau**. Elle intervient dans le cas de procédés mettant en œuvre un matériau ayant une propriété physique non constante.

2. ■ Exemple guidé n° 4 : cuisson d'un poulet

Ce premier exemple est un cas couramment rencontré dans la littérature sur l'analyse dimensionnelle (Zlokarnik, 2002 ; Szirtes, 2007). Bien que tiré de la vie quotidienne et non à proprement parlé issu du génie des procédés, il offre l'avantage d'illustrer l'intérêt de l'analyse dimensionnelle comme outil d'aide à la décision. L'objectif visé ici est de reproduire un procédé étudié à une échelle donnée à une échelle plus importante. Avant de s'intéresser à l'extrapolation proprement dite, nous allons établir la configuration du système selon une démarche d'analyse dimensionnelle classique.

2.1. Établissement de la configuration du système

Nous nous intéressons à la cuisson d'un poulet dans un four préchauffé. Le poulet est initialement introduit à une température de 20 °C. On considère que

la température de peau du poulet θ_p atteint instantanément la température de consigne du four. Cela veut donc dire que la résistance au transfert de chaleur par convection et/ou rayonnement dans le four est supposée négligeable, c'est-à-dire que le mode de transfert de chaleur dominant dans ce problème est la conduction thermique dans le poulet.

La variable cible est la température moyenne de la chair au cœur du poulet, notée θ (figure 5.1). D'un point de vue physique, ce paramètre caractérise à lui seul l'avancement de la cuisson qui va conférer à la chair ses propriétés gustatives.

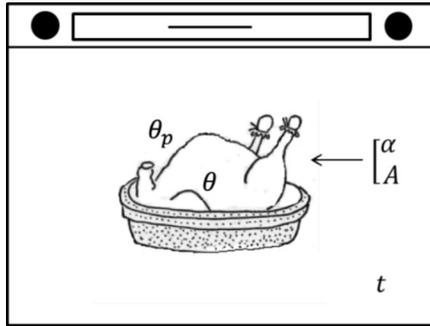


Figure 5.1. Représentation schématique des grandeurs physiques influençant la température moyenne de la chair au cœur du poulet.

Les grandeurs physiques ayant une influence sur θ sont :

- les *paramètres matière* : ce sont les propriétés thermiques de la chair du poulet qui peuvent être appréciées par un seul paramètre : la diffusivité thermique, α . Notons que α est une variable intermédiaire (voir chapitre 3) définie selon :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad [5.7]$$

où λ est la conductivité thermique, ρ la masse volumique et c_p la chaleur spécifique ;

- les *paramètres de procédé* : il s'agit de la température régnant dans le four (elle est imposée par le thermostat et le four a été préchauffé avant introduction du poulet). Au regard des hypothèses formulées, cette température impose une température de peau du poulet, θ_p . La durée pendant laquelle le poulet reste dans le four, t , qui n'est rien d'autre que le temps de cuisson, doit être également listée ;

- les *conditions aux frontières et initiale* : il s'agit de la surface d'échange par laquelle la chaleur du four est transférée au poulet, c'est-à-dire l'enveloppe externe du poulet, notée A .

Ce problème se ramène donc à cinq grandeurs physiques dont les dimensions s'expriment à partir des trois dimensions fondamentales (K, L, T). Le nombre de mesures internes associé est donc égal à $5 - 3 = 2$.

En prenant comme variables répétées (θ_p, t, A) , la matrice aux dimensions peut être définie (figure 5.2).

	α	θ	θ_p	t	A
K	0	1	1	0	0
T	-1	0	0	1	0
L	2	0	0	0	2

Figure 5.2. Matrice aux dimensions D dans l'étude de la cuisson du poulet.

Après transformation de la matrice centrale en matrice identité, la matrice aux dimensions modifiée est obtenue (figure 5.3).

	α	θ	θ_p	t	A
K	0	1	1	0	0
T	-1	0	0	1	0
L/2	1	0	0	0	1

Figure 5.3. Matrice aux dimensions modifiée D_m dans l'étude de la cuisson du poulet.

Les coefficients contenus dans la matrice résiduelle modifiée obtenue sur la figure 5.3 permettent de former les nombres sans dimension suivants :

$$\frac{\theta}{\theta_p} = F\left(\frac{\alpha \cdot t}{A}\right) \quad [5.8]$$

où F est la relation de procédé recherchée.

La configuration du système ne contient qu'une seule mesure interne $(\alpha \cdot t / A)$ qui gouverne à elle seule l'évolution de la mesure cible θ / θ_p . Il est intéressant de remarquer que $(\alpha \cdot t / A)$ n'est rien d'autre qu'un nombre de Fourier thermique (voir annexe 1).

Ainsi, cet exemple illustre également l'intérêt d'introduire une variable intermédiaire (ici α) dans la démarche d'analyse dimensionnelle afin de réduire avantagusement la configuration du système (voir chapitres 3 et 7).

2.2. Analyse de la configuration du système et des règles de similitude associées

Interrogeons-nous maintenant sur la manière d'utiliser l'analyse dimensionnelle réalisée ci-dessus afin d'amener, à température de four inchangée, un poulet de taille plus importante à un même état de cuisson (c'est-à-dire atteindre la même température moyenne de la chair à cœur θ). En particulier, l'objectif est de montrer que les règles de similitude permettent de déterminer le temps de cuisson à imposer selon la masse du poulet à cuire.

Imaginons ainsi le cas où on souhaiterait cuire un gros poulet pour huit personnes (prototype) à l'identique de ce qui aurait été exécuté au préalable avec un poulet pour quatre personnes (maquette). On admet, de manière un peu fictive, que l'éleveur de volaille est capable de nous fournir un gros poulet à la fois semblable géométriquement et possédant des propriétés thermiques de chair identiques à celles du petit poulet. On supposera de plus que notre four est en mesure d'accueillir chacune de ces volailles !

Compte-tenu du fait que la configuration du système est décrite par une seule mesure interne (équation 5.8), l'analyse dimensionnelle procure les relations de similitude pour l'extrapolation envisagée, à savoir :

$$\text{Si :} \quad \left(\frac{\alpha \cdot t}{A} \right)_{\text{maquette}} = \left(\frac{\alpha \cdot t}{A} \right)_{\text{prototype}} \quad [5.9]$$

$$\text{alors :} \quad \left(\frac{\theta}{\theta_p} \right)_{\text{maquette}} = \left(\frac{\theta}{\theta_p} \right)_{\text{prototype}} \quad [5.10]$$

Partant de l'équation 5.9, la règle d'échelle que doit satisfaire le temps de cuisson peut être obtenue selon :

$$\left(\frac{\alpha \cdot t}{A} \right) = \text{idem} \quad [5.11]$$

soit :

$$\frac{t_{\text{prototype}}}{t_{\text{maquette}}} = \frac{A_{\text{prototype}}}{A_{\text{maquette}}} \cdot \frac{\alpha_{\text{maquette}}}{\alpha_{\text{prototype}}} \quad [5.12]$$

Par hypothèse, nous avons postulé que les propriétés de chair étaient les mêmes pour le petit et le gros poulet, soit : $\alpha_{\text{maquette}} = \alpha_{\text{prototype}}$. L'équation 5.12 devient donc :

$$\frac{t_{\text{prototype}}}{t_{\text{maquette}}} = \frac{A_{\text{prototype}}}{A_{\text{maquette}}} \quad [5.13]$$

L'équation 5.13 nous informe que le rapport des temps de cuisson doit être égal au rapport des surfaces externes des pièces de volailles à cuire. À ce stade,

cette information est difficile à utiliser, car l'achat des volailles se fait en fonction de leur masse et non de leur surface externe. Pour rendre la relation précédente directement utilisable, il est nécessaire d'explicitier la corrélation entre le volume et la surface pour un corps donné :

$$m = \rho.V \equiv \rho.L^3 \quad [5.14]$$

Sachant que $A \equiv L^2$, il vient :

$$m \equiv \rho.A^{3/2} \quad [5.15]$$

On peut donc conclure que :

$$A \equiv m^{2/3} \quad [5.16]$$

Ainsi, pour deux poulets, l'un petit et l'autre gros, géométriquement similaires et possédant des propriétés thermiques de chair identiques, on peut conclure que :

$$\frac{t_{\text{prototype}}}{t_{\text{maquette}}} = \left(\frac{m_{\text{prototype}}}{m_{\text{maquette}}} \right)^{2/3} \quad [5.17]$$

L'équation 5.17 représente donc la règle de similitude qui assure l'invariance de la mesure interne cible, $\pi_{\text{cible}} = \theta / \theta_p$ aux deux échelles telle qu'explicitée dans l'équation 5.10.

Notons d'emblée que si le thermostat du four lors de la cuisson du petit et du gros poulet est le même, alors on a $\theta_{p \text{ maquette}} = \theta_{p \text{ prototype}}$, et l'équation 5.10 impose $\theta_{\text{maquette}} / \theta_{\text{prototype}} = 1$. Autrement dit, quand le rapport des temps de cuisson, $t_{\text{prototype}} / t_{\text{maquette}}$ évolue dans la même proportion que le rapport des masses à la puissance 2/3, et qu'on cuit à même température de four les deux poulets, on obtiendra le même état de cuisson. Ceci nous permet par exemple d'affirmer que le temps de cuisson doit croître de 1,58 quand la masse du poulet est multipliée par 2.

Remarques

1. Zlokarnik (2006) signale que certains livres de cuisine, notamment des ouvrages américains s'intéressant comme il se doit à la cuisson de la dinde, aboutissent par l'expérience à des lois d'échelle où le rapport des temps de cuisson évolue avec le rapport des masses à la puissance 0,6... ce qui est vraiment proche et conforme aux recommandations obtenues ici par analyse dimensionnelle !

2. Dans cette étude, le prototype est une bestiole de forme complexe ; ceci nous a empêchés de garantir stricto-sensu la similitude géométrique entre les deux échelles (petit poulet et gros poulet), comme on pourrait le décider, en génie des procédés, lorsqu'on maîtrise la définition du prototype à partir des dimensions de la maquette. Ainsi, nous avons dû admettre dans cet exemple l'existence de cette similitude géométrique en sachant qu'un biais réside dans cette

hypothèse. Le fait qu'au final les conditions de marche prédites sur la cuisson du poulet soient conformes à l'expérience (remarque 1) valide cette hypothèse.

3. ■ Exemple guidé n° 5 : puissance d'un agitateur plan vertical de taille industrielle

On cherche, au travers de ce deuxième exemple, à évaluer le comportement d'une installation industrielle à l'aide d'essais sur maquette convenablement choisis. La variable cible est la puissance consommée P par un agitateur plan vertical à l'échelle industrielle (prototype).

Avant de s'intéresser aux règles précises à adopter au niveau des essais sur maquette pour réussir à mimer le point de fonctionnement à l'échelle industrielle, rappelons les éléments d'analyse dimensionnelle que nous avons établis sur ce système dans l'exemple guidé n° 1 du chapitre 2.

3.1. Établissement de la configuration du système

Nous avons montré que ce problème se posait en termes de grandeurs physiques indépendantes selon :

$$P = f(T, d, C_b, H_L, w, \mu, \rho, N, g) \quad [5.18]$$

où P est la puissance consommée par l'agitateur plan dans le prototype, T le diamètre de la cuve, d le diamètre de l'agitateur, C_b la distance entre le fond de la cuve et le bas de l'agitateur, H_L la hauteur de liquide, w la hauteur de l'agitateur, N la vitesse de rotation de l'agitateur, g l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique du fluide et μ la viscosité du fluide newtonien (figure 2.16).

L'analyse dimensionnelle transforme l'équation 5.18 selon (voir chapitre 2, paragraphe 4.1.2) :

$$\begin{aligned} \pi_{cible} &= \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot d^5} \\ &= F \left(\pi_2 = Re = \frac{\rho \cdot N \cdot d^2}{\mu}, \pi_3 = Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g}, \pi_4 = \frac{T}{d}, \pi_5 = \frac{w}{d}, \pi_6 = \frac{H_L}{d}, \pi_7 = \frac{C_b}{d} \right) \end{aligned} \quad [5.19]$$

Où F est la relation de procédé recherchée.

3.2. Analyse de la configuration du système et des règles de similitude associées

L'équation 5.19 nous indique que, si les mesures internes π_2 à π_7 prennent les mêmes valeurs (notées $\pi_2 = \text{idem}$ et $\pi_3 = \text{idem}$ et $\pi_4 = \text{idem}$ et $\pi_5 = \text{idem}$ et

$\pi_6 = \text{idem}$ et $\pi_7 = \text{idem}$) aux deux échelles, la variable cible π_i conserve elle-même une valeur identique (c'est-à-dire $\pi_i = \text{idem}$).

Le système d'agitation utilisé pour les essais sur maquette comprend un agitateur plan vertical, et est défini par l'ensemble des grandeurs physiques suivant :

$$\{T', d', C_b', H_L', w', \mu', \rho', N', g\} \quad [5.20]$$

On veut connaître la puissance P' que consomme l'agitateur utilisé dans la maquette de laboratoire, en mettant en œuvre des essais convenablement choisis. Précisons que les grandeurs physiques influençant la puissance consommée aux deux échelles (maquette et prototype), respectivement définies dans les équations 5.18 et 5.20, sont mesurées avec les mêmes unités (SI).

Les fluides mis en mouvement aux deux échelles n'ont pas obligatoirement les mêmes propriétés physiques ($\rho \neq \rho'$) et ($\mu \neq \mu'$). On suppose néanmoins fort opportunément que les expériences sont réalisées aux deux échelles sur Terre et que l'accélération de la pesanteur g ne varie pas.

Les relations de similitude issues de l'établissement des nombres sans dimension (équation 5.19) conduisent donc à la condition suivante :

Si :

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{\rho \cdot N \cdot d^2}{\mu} = \frac{\rho' \cdot N' \cdot d'^2}{\mu'} \quad \text{et} \\ \pi_3 &= \frac{N^2 \cdot d}{g} = \frac{N'^2 \cdot d'}{g} \quad \text{et} \\ \pi_4 &= \frac{T}{d} = \frac{T'}{d'} \quad \text{et} \quad \pi_5 = \frac{w}{d} = \frac{w'}{d'} \quad \text{et} \\ \pi_6 &= \frac{H_L}{d} = \frac{H'_L}{d'} \quad \text{et} \quad \pi_7 = \frac{C_b}{d} = \frac{C'_b}{d'} \end{aligned} \quad [5.21]$$

alors :

$$\pi_1 = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot d^5} = \frac{P'}{\rho' \cdot N'^3 \cdot d'^5} \quad [5.22]$$

Les équations 5.21 et 5.22 constituent les relations de similitude associées à ce problème. Chacune apparaît ici comme l'égalité de deux mesures internes liées à la maquette et au prototype.

L'équation 5.21, qui exprime l'invariance du point de fonctionnement (c'est-à-dire l'invariance des valeurs numériques des mesures internes relatives au système), fixe les règles de similitude que doivent satisfaire certaines grandeurs physiques pour assurer l'invariance de la mesure interne cible (équation 5.22).

Ainsi, on déduit de l'équation 5.21 :

– l'égalité des mesures internes π_4 à π_7 , soit :

$$\frac{T}{T'} = \frac{d}{d'} = \frac{w}{w'} = \frac{H_L}{H'_L} = \frac{C_b}{C'_b} = F_e \quad [5.23]$$

L'équation 5.23 impose que toutes les longueurs caractéristiques intervenant dans la définition du système (T et T' , d et d' , w et w' , H_L et H'_L , C_b et C'_b) doivent être dans un rapport constant. Ce rapport n'est rien d'autre que le *facteur d'échelle* entre prototype et maquette, F_e (équation 5.6). La constance de ce facteur d'échelle est la condition indispensable pour assurer la similitude géométrique entre maquette et prototype.

Si on avait décidé qu'il en soit autrement, par exemple que les largeurs ne suivent pas le même facteur échelle que les hauteurs, on n'aurait pas pu obtenir une maquette semblable au système d'agitation industriel ; cette distorsion de la maquette par rapport au rétrécissement homothétique nous aurait empêché d'obtenir une similitude complète car les configurations des deux systèmes n'auraient pas été les mêmes.

– l'égalité de la mesure interne π_3 (nombre de Froude), soit :

$$Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g} = Fr' = \frac{N'^2 \cdot d'}{g} \quad [5.24]$$

L'équation 5.24 donne la règle de similitude que doit satisfaire la vitesse de rotation du mobile dans la maquette :

$$N' = N \cdot (F_e)^{1/2} \quad [5.25]$$

– l'égalité de la mesure interne π_2 (nombre de Reynolds), soit :

$$Re = \frac{\rho \cdot N \cdot d^2}{\mu} = Re' = \frac{\rho' \cdot N' \cdot d'^2}{\mu'} \quad [5.26]$$

L'équation 5.26 donne la règle de similitude que doivent satisfaire les propriétés du fluide à utiliser avec la maquette pour garantir l'invariance de la mesure interne π_2 :

$$\frac{\mu'}{\rho'} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{N'}{N} \cdot \frac{d'^2}{d^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot F_e^{1/2} \cdot F_e^{-2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot (F_e)^{-3/2} \quad [5.27]$$

Remarques

1. Ainsi, en imposant sur la maquette les conditions de marche définies par les équations 5.23, 5.25 et 5.27, la maquette et le prototype ont un point de fonctionnement identique. Dans ce cas, l'équation 5.22 est vérifiée, et par voie de conséquence, la puissance P à mettre en œuvre au niveau du prototype industriel est définie en fonction de la puissance P' obtenue sur la maquette selon :

$$\frac{P}{P'} = \frac{\rho \cdot N^3 \cdot d^5}{\rho' \cdot N'^3 \cdot d'^5} = \frac{\rho}{\rho'} \cdot F_e^{7/2} \quad [5.28]$$

2. On s'aperçoit que la similitude totale peut être théoriquement atteinte pour ce cas. Cependant, il faut s'assurer qu'on puisse disposer d'un fluide ayant les caractéristiques suivantes :

$$\frac{\mu}{\rho} = F_e^{3/2} \cdot \frac{\mu'}{\rho'} \quad [5.29]$$

On note ainsi que les choix du fluide à utiliser et de la taille de la maquette sont intimement liés. Afin de disposer de plus de latitude dans le choix du fluide, on aura par conséquent intérêt à définir le facteur d'échelle en fonction de caractéristiques du fluide expérimentalement réalistes, et non pas à choisir la taille de la maquette *a priori*.

3.3. Apports de la connaissance de la relation de procédé pour le changement d'échelle

Dans cet exemple, on voit que le comportement de l'installation industrielle peut être prédit à l'aide d'essais sur maquette convenablement choisis, sans connaître l'expression exacte de la relation de procédé F .

La question qui vient naturellement à l'esprit est : que nous apporterait en plus la connaissance de la relation de procédé, établie par des essais sur maquette ?

Nous allons montrer que la connaissance de cette relation peut offrir des opportunités supplémentaires pour fixer les conditions de marche des essais sur maquette, et obtenir ainsi des informations pertinentes sur le procédé industriel.

Dans le chapitre 2 (paragraphe 4.1.5), nous avons obtenu par expérimentations sur des maquettes de petite taille ($0,041 \text{ m} < T' < 0,105 \text{ m}$) la relation de procédé suivante pour un système d'agitation plan vertical centré dans une cuve :

$$N_p' = \frac{205,5}{\text{Re}'}. \left(\frac{T'}{d'} \right)^{-0,960} \cdot \left(\frac{H_L'}{d'} \right)^{0,076} \cdot \left(\frac{C_b'}{d'} \right)^{-0,048} \quad [5.30]$$

Cette relation a été obtenue quand les mesures internes définissant la configuration du système (figure 2.20) couvrent les domaines suivants $\{1,31 < T'/d' < 2,59$; $0,96 < w'/d' < 1$; $1,17 < H_L'/d' < 2,68$; $10^{-3} < C_b'/d' < 2,44$; $4,37 \cdot 10^{-5} < \text{Re}' < 2,47$; $6,85 \cdot 10^{-9} < \text{Fr}' < 0,30\}$. La relation de procédé 5.30 indique que le nombre de puissance N_p' est indépendant du nombre de Froude quand celui est compris entre $6,85 \cdot 10^{-9}$ et $0,39$. Dans ce cas, le nombre de puissance ne dépend que du nombre de Reynolds et de certaines mesures internes géométriques (T'/d' , H_L'/d' , C_b'/d'). L'influence de la mesure interne w'/d' n'a pas pu être évaluée car celle-ci n'a quasiment pas varié au cours des essais (proche de 1).

Autrement dit, si les valeurs numériques des mesures internes mises en jeu dans le prototype satisfont $\{1,31 < T/d < 2,59 ; 0,96 < w/d < 1 ; 1,17 < H_L/d < 2,68 ; 10^{-3} < C_b/d < 2,44 ; 4,37 \cdot 10^{-5} < Re < 2,47\}$, on peut utiliser l'équation [5.30] pour chercher les conditions d'invariance de N_p aux deux échelles. Il faudra en revanche vérifier au terme de la procédure que les valeurs du nombre de Froude atteintes sur le prototype concordent avec celles obtenues dans les essais sur maquette.

Le prototype dont nous souhaitons connaître la consommation de puissance est un agitateur plan vertical de diamètre ($d = w = 0,168$ m ; $C_b = 0,049$ m) placé dans une cuve de diamètre $T = 0,345$ m contenant une hauteur de fluide $H_L = 0,377$ m. Le fluide à agiter (entre 30 et 100 tr.min⁻¹) est un sirop de glucose de masse volumique et viscosité respectivement égales à 1419,7 kg.m⁻³ et 163,1 Pa.s (à 19 °C). Par conséquent, les valeurs numériques des mesures internes mises en jeu dans le prototype, $\{T/d = 2,05 ; w/d = 1 ; H_L/d = 2,24 ; C_b/d = 0,291 ; 0,12 < Re < 0,4 ; 0,025 < Fr < 0,28\}$, concordent avec les conditions d'obtention de la relation de procédé 5.30. Il est donc possible de prédire les valeurs prises par N_p dans le prototype à partir d'une relation établie pour des maquettes quatre fois plus petites ($F_e = \frac{0,168}{0,0405} = 4,14$).

L'application de la relation 5.30 au prototype conduit à $N_p = \frac{116,2}{Re}$, et par conséquent à $P = 116,2 \cdot \mu \cdot N^2 \cdot d^3$. Les mesures de la consommation de puissance effectuées sur le prototype ont donné $N_p = \frac{106,4}{Re}$, soit $P = 106,4 \cdot \mu \cdot N^2 \cdot d^3$ (figure 5.4).

La différence entre la prédiction (équation 5.30) et les expériences sur prototype peut s'expliquer par le fait que la maquette et le prototype n'étaient pas en parfaite similitude géométrique. En effet, la cuve du prototype disposait d'un fond bombé (cuve à fond plat sur la maquette) pour des raisons de facilité de vidange. La fixation du mobile sur l'arbre d'agitation était également un peu différente.

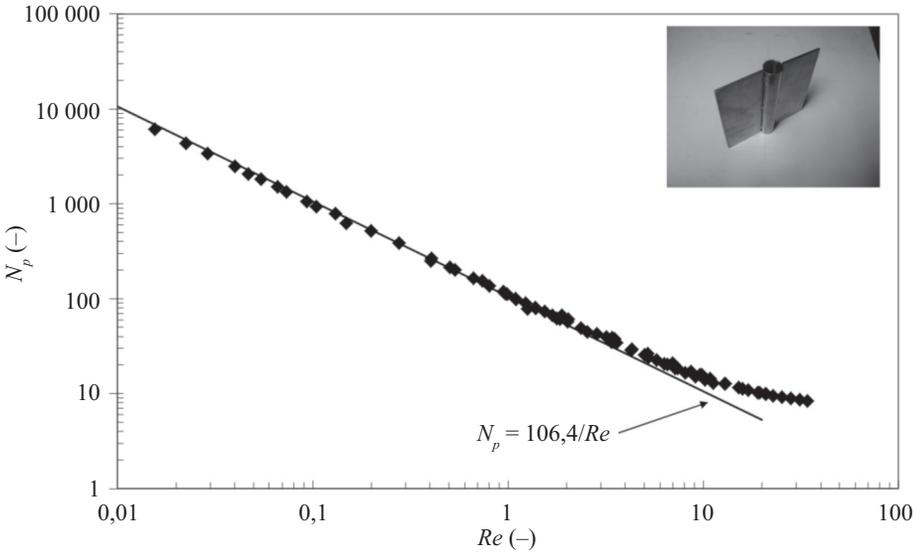


Figure 5.4. Courbe de puissance expérimentale obtenue dans le prototype.

Allons au bout de cette démarche et exploitons maintenant la relation de procédé. En présence d’une similitude géométrique entre maquette et prototype, les égalités suivantes sont garanties :

$$\frac{T}{d} = \frac{T'}{d'} = \text{idem} \quad \text{et} \quad \frac{H_L}{d} = \frac{H'_L}{d'} = \text{idem} \quad \text{et} \quad \frac{C_b}{d} = \frac{C'_b}{d'} = \text{idem} \quad \text{et} \quad \frac{w}{d} = \frac{w'}{d'} = \text{idem} \quad [5.31]$$

Les relations de similitude issues de la relation de procédé se résument donc à :

Si :

$$Re = \frac{\rho \cdot N \cdot d^2}{\mu} = \frac{\rho' \cdot N' \cdot d'^2}{\mu'} = Re' \quad [5.32]$$

Alors :

$$N_p = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot d^5} = \frac{P'}{\rho' \cdot N'^3 \cdot d'^5} = N'_p \quad [5.33]$$

L’égalité 5.32 donne la règle de similitude (égalité des nombres de Reynolds aux deux échelles) à respecter avec la maquette pour garantir l’invariance de la mesure interne cible, N_p :

$$\frac{N}{N'} = F_e^{-2} \cdot \frac{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}{\left(\frac{\mu'}{\rho'}\right)} \quad [5.34]$$

Pour assurer l’égalité des nombres de Reynolds aux deux échelles (équation 5.32), plusieurs solutions existent :

– jouer uniquement sur les propriétés du fluide en changeant sa nature entre les essais sur maquette et prototype :

– agir uniquement sur la vitesse de rotation de l'agitateur ;

– agir sur la vitesse de rotation de l'agitateur et sur les propriétés du fluide simultanément.

Supposons qu'on utilise le même fluide au niveau du prototype industriel et des essais sur maquette, et que, pour des raisons de souplesse, on agisse uniquement sur la vitesse de rotation de l'agitateur. L'équation 5.34 se simplifie alors selon :

$$N = F_e^{-2} \cdot N' \quad [5.35]$$

Dans ce cas :

$$Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g} = \frac{(F_e^{-4} \cdot F_e) \cdot (N'^2 \cdot d')}{g} = F_e^{-3} \cdot Fr' \quad [5.36]$$

Au final, on s'aperçoit qu'en imposant les conditions de marche suivante sur la maquette :

$$T' = \frac{T}{F_e}, \quad d' = \frac{d}{F_e}, \quad C'_B = \frac{C_B}{F_e}, \quad H'_L = \frac{H_L}{F_e}, \quad w' = \frac{w}{F_e} \quad \text{et} \quad N' = N \cdot F_e^2, \quad ,$$

$$\text{avec } \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \mu = \mu' \quad [5.37]$$

alors la maquette et le prototype n'ont pas un point de fonctionnement identique car la valeur de $Fr' = F_e^3 \cdot Fr$.

La connaissance de la relation de procédé établie à l'échelle de la maquette permet néanmoins de préciser que, si Fr reste compris entre $6,85 \cdot 10^{-9}$ et $0,39$, il n'a pas d'influence sur N'_p . La puissance P à mettre en œuvre au niveau du prototype peut alors être calculée à partir des équations 5.33 et 5.35.

$$P = \frac{F_e^5}{F_e^6} \cdot P' = F_e^{-1} \cdot P' \quad [5.38]$$

En revanche, il est impossible d'accéder à cette puissance consommée si Fr est en dehors de cette gamme, l'identité des points de fonctionnement sur la maquette et le prototype n'étant alors plus respectée (équation 5.36).

Par cet exemple, on observe une nouvelle fois que garantir simultanément une similitude géométrique entre la maquette et l'échelle industrielle (prototype) et fixer des conditions de marche identiques sur maquette et prototype ne sont pas suffisantes pour assurer qu'un procédé étudié à l'échelle de la maquette mime correctement les mécanismes observés à l'échelle du prototype. On observe également qu'il est nécessaire de cibler le point de fonctionnement industriel pour définir correctement les essais sur maquette et mobiliser in fine ces derniers au service d'une meilleure compréhension du fonctionnement du prototype.

4. ■ Exemple guidé n° 6 : procédé d'émulsification en cuve agitée

Dans ce troisième exemple, l'objectif est d'évaluer quelles doivent être les conditions de marche à imposer sur une installation industrielle (prototype) pour reproduire un procédé d'émulsification mis au point par des essais sur maquette de laboratoire. Signalons d'emblée que ce procédé est un cas de *similitude partielle*. En effet, nous allons voir que, compte tenu du nombre important de grandeurs physiques mis en jeu (milieu diphasique, géométrie du système d'agitation) et du faible nombre de paramètres pouvant être choisis arbitrairement, il n'est pas possible de disposer de suffisamment de degrés de liberté pour assurer l'identité du point de fonctionnement entre la maquette et le prototype.

Avant de s'intéresser à la démarche à adopter pour identifier de façon raisonnée quels sont les nombres sans dimension dont l'effet est prépondérant sur la mesure interne cible, nous allons établir par analyse dimensionnelle la configuration du système.

4.1. Établissement de la configuration du système

On s'intéresse ici à un procédé d'émulsification dans une cuve agitée à fond plat et non chicanée. L'agitateur est une turbine dilacératrice, verticalement centrée.

L'émulsion ne contient que deux phases (huile et eau). Initialement (avant la mise en route de l'agitateur), les deux phases sont superposées, la phase aqueuse (plus dense) occupant le fond de cuve (figure 5.5). La mise en rotation de l'agitateur conduit à la formation de l'émulsion : des gouttelettes d'huile se dispersent alors au sein de la phase aqueuse. Après une certaine durée d'opération, la taille des gouttelettes est mesurée. Par la suite, on suppose que les gouttelettes suivent une distribution monomodale et que le diamètre de Sauter mesuré (d_{32}) est un indicateur pertinent de cette distribution de taille, qui sera donc choisi comme variable cible.

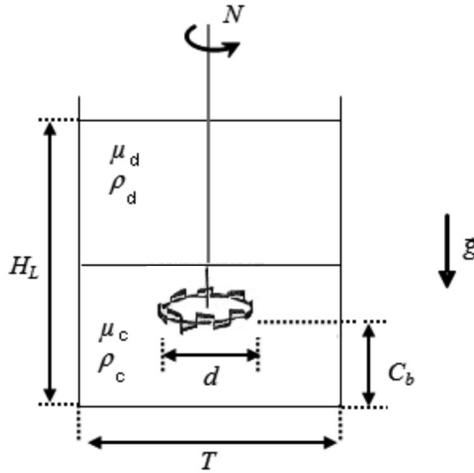


Figure 5.5. Représentation schématique et identification des grandeurs physiques influençant un procédé d'émulsification réalisée dans une cuve agitée avec une turbine dilacératrice verticalement centrée.

Les grandeurs physiques ayant une influence sur le diamètre de Sauter des gouttelettes sont :

- les *paramètres matière* : ce sont les propriétés de la phase continue (indice c) et de la phase dispersée (indice d), c'est-à-dire leurs masses volumiques (ρ_c, ρ_d) et leurs viscosités (μ_c, μ_d).

Il s'agit aussi de lister la fraction volumique, ϕ , qui est le rapport entre le volume occupé par la phase dispersée et celui occupé par la phase continue.

Enfin, il faut également introduire la tension interfaciale σ car les phases ne sont pas miscibles ;

- les *paramètres de procédé* : ce sont la vitesse de rotation de l'agitateur N et la durée de l'agitation, t ;

- les *conditions aux frontières et initiales* : la description complète des frontières du domaine d'écoulement fait appel à de nombreux paramètres géométriques, autres que T (diamètre de la cuve), d (diamètre de l'agitateur), C_b (distance entre le fond de la cuve et le bas de l'agitateur), H_L (hauteur initiale des deux phases dans la cuve) (figure 5.5). Il s'agit en particulier des paramètres définissant la géométrie du mobile (forme, taille et nombre de dents en périphérie de la turbine dilacératrice). On désignera dans la suite par $\{p_{\text{géo}}\}$ l'ensemble des paramètres géométriques, autres que T, d, C_b et H_L , nécessaires à la description complète de ce système d'agitation ;

- les *constantes universelles* : il convient de lister l'accélération de la pesanteur g .

Le problème, en termes de grandeurs physiques indépendantes, se ramène par conséquent à :

$$d_{32} = f(g, T, H_L, C_b, d, \{p_{géo}\}, \phi, \sigma, \mu_c, \mu_d, \rho_c, \rho_d, N, t) \quad [5.39]$$

La matrice aux dimensions correspondant au problème est représentée sur la figure 5.6. La base choisie doit être constituée des trois variables répétées (trois dimensions fondamentales étant nécessaires pour exprimer les dimensions des grandeurs listées dans l'équation 5.39). Comme dans l'exemple guidé n° 1 du chapitre 2, nous choisissons $\{\rho_c, N, d\}$. En effet, cette base, conforme aux principes énoncés dans le chapitre 2, est classiquement utilisée dans les problèmes d'agitation-mélange : elle a donc logiquement été préférée à d'autres.

	d_{32}	g	T	H_L	C_b	μ_c	μ_d	ϕ	σ	ρ_d	t	$\{p_{géo}\}$	ρ_c	d	N
M	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
L	1	1	1	1	1	-1	-1	0	0	-3	0	1	-3	1	0
T	0	-2	0	0	0	-1	-1	0	-2	0	1	0	0	0	-1

Figure 5.6. Matrice aux dimensions pour l'étude de la taille de gouttelettes lors d'un procédé d'émulsification avec une turbine dilacératrice.

La figure 5.7 présente la matrice aux dimensions modifiée obtenue suite à la transformation de la matrice centrale en matrice identité.

	d_{32}	g	T	H_L	C_b	μ_c	μ_d	ϕ	σ	ρ_d	t	$\{p_{géo}\}$	ρ_c	d	N
M	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
3M+L	1	1	1	1	1	2	2	0	3	0	0	1	0	1	0
-T	0	2	0	0	0	1	1	0	2	0	-1	0	0	0	1

Figure 5.7. Matrice aux dimensions modifiée pour l'étude de la taille de gouttelettes lors d'un procédé d'émulsification avec une turbine dilacératrice.

Les coefficients contenus dans la matrice résiduelle modifiée permettent d'obtenir l'espace des mesures internes associé au problème dans la base $\{\rho_c, N, d\}$:

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_1 \left(\begin{array}{l} \pi_2 = \frac{g}{N^2 \cdot d}, \pi_3 = \frac{T}{d}, \pi_4 = \frac{H_L}{d}, \pi_5 = \frac{C_b}{d}, \pi_6 = \frac{\mu_c}{\rho_c \cdot d^2 \cdot N}, \\ \pi_7 = \frac{\mu_d}{\rho_c \cdot d^2 \cdot N}, \pi_8 = \phi, \pi_9 = \frac{\sigma}{\rho_c \cdot N^2 \cdot d^3}, \pi_{10} = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \pi_{11} = N \cdot t, \{ \pi_{géo} \} \end{array} \right) \quad [5.40]$$

où $\{\pi_{géo}\}$ représente l'ensemble des mesures internes géométriques associées aux paramètres géométriques $\{p_{géo}\}$.

En procédant à des réarrangements entre nombres sans dimension (voir chapitre 2, paragraphe 1.3.5), les nombres sans dimension suivants sont obtenus :

- le nombre de Reynolds d'agitation ($Re = \frac{\rho_c \cdot N \cdot d^2}{\mu_c}$) évalué à partir des propriétés de la phase continue, en élevant π_6 à la puissance -1 ;
- le nombre de Froude ($Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g}$), en élevant π_2 à la puissance -1 ;
- le rapport des viscosités $\frac{\mu_d}{\mu_c}$, en divisant π_7 par π_6 ;
- le nombre de Weber $We = \frac{\rho_c \cdot N^2 \cdot d^3}{\sigma}$ également évalué à partir des propriétés de la phase continue, en élevant π_9 à la puissance -1 .

Ces réarrangements transforment l'équation 5.40 selon :

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_2 \left(Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g}, \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, Re = \frac{\rho_c \cdot N \cdot d^2}{\mu_c}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \phi, \right. \\ \left. We = \frac{\rho_c \cdot N^2 \cdot d^3}{\sigma}, \frac{\rho_d}{\rho_c}, N.t, \{\pi_{géo}\} \right) \quad [5.41]$$

D'après l'équation 5.41, au moins dix mesures internes définissent la configuration du système, et sont ainsi responsables des variations de la mesure interne cible d_{32}/d , confirmant ainsi la complexité du procédé d'émulsification.

Examinons un peu plus en détail la configuration du système obtenue.

L'analyse physique du problème montre que la taille des gouttelettes est le résultat d'un équilibre entre des forces extérieures agissant sur la goutte pour la rompre (force d'inertie, force de viscosité, force de gravité) et des forces cohésives (forces interfaciales). Il est donc logique de retrouver dans la configuration du système comme mesures internes des rapports de ces forces : We, Re, Fr (voir annexes 1 et 7).

On retrouve également dans la configuration du système des mesures internes qui conditionnent l'hydrodynamique, notamment :

- la fraction volumique de la phase dispersée (ϕ), le rapport des viscosités (μ_d / μ_c) et des masses volumiques (ρ_d / ρ_c) des deux phases. Ces mesures internes agissent sur les forces d'inertie ou créent des forces de poussée supplémentaires (sédimentation/flottaison) ;
- les mesures internes géométriques du système : $T/d, H_L/d, C_b/d, \{\pi_{géo}\}$;

– la mesure interne $N.t$ qui traduit l'influence de la durée d'agitation (c'est-à-dire la durée pendant laquelle ces forces agissent sur les gouttelettes) ; la formation des gouttelettes étant le résultat d'un équilibre rupture/cohésion, il est donc logique de retrouver ce ratio.

4.2. Analyse de la configuration du système et des règles de similitude associées

La configuration du système étant définie (équation 5.41), *est-il possible de reproduire sur un prototype industriel un point de fonctionnement obtenu sur maquette* ? La réponse à cette question est négative ! Pour le démontrer de façon concise, nous allons uniquement montrer qu'on ne peut pas conserver simultanément aux deux échelles deux des valeurs numériques des mesures internes entrant dans la configuration du système : il s'agit en l'occurrence de celles associées au nombre de Reynolds et au nombre de Weber.

Par la suite, nous désignerons la liste des grandeurs physiques associées au prototype industriel selon :

$$(g, T, H_L, C_b, d, \{p_{géo}\}, \phi, \sigma, \mu_c, \mu_d, \rho_c, \rho_d, N, t) \quad [5.42]$$

et la liste des grandeurs physiques associées à la maquette selon :

$$(g, T', H'_L, C'_b, d', \{p'_{géo}\}, \phi', \sigma', \mu'_c, \mu'_d, \rho'_c, \rho'_d, N', t') \quad [5.43]$$

On se place ici dans le cas où l'émulsion est élaborée avec les mêmes ingrédients aux deux échelles, soit :

$$\phi = \phi', \sigma = \sigma', \mu_c = \mu'_c, \mu_d = \mu'_d, \rho_c = \rho'_c, \rho_d = \rho'_d \quad [5.44]$$

et par voie de conséquence :

$$\frac{\mu'_d}{\mu'_c} = \frac{\mu_d}{\mu_c} \quad \text{et} \quad \frac{\rho'_d}{\rho'_c} = \frac{\rho_d}{\rho_c} \quad [5.45]$$

Par ailleurs, on projette d'utiliser à l'échelle industrielle un agitateur géométriquement similaire à la turbine dilacératrice utilisée avec la maquette. Le facteur d'échelle F_e entre le prototype et la maquette est :

$$F_e = \frac{d}{d'} \quad [5.46]$$

Dans ce cas, on a :

$$\left[\frac{T'}{d'} = \frac{T}{d} \right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{C'_b}{d'} = \frac{C_b}{d} \right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{H'_L}{d'} = \frac{H_L}{d} \right] \quad \text{et} \quad \left\{ \pi'_{géo} \right\} = \left\{ \pi_{géo} \right\} \quad [5.47]$$

D'après la configuration du système établie (équation 5.41), l'existence de la similitude géométrique (équations 5.46 et 5.47), et la mise en œuvre de la même formulation de produit sur le prototype et la maquette (équation 5.44), le système d'équations 5.48 à 5.51 suivant doit être satisfait pour obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles (conservation de la même valeur de la mesure interne cible d_{32}/d) :

$$Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g} = \frac{N'^2 \cdot d'}{g} = Fr' \quad \text{et,} \quad [5.48]$$

$$Re = \frac{\rho_c \cdot N \cdot d^2}{\mu_c} = \frac{\rho_c \cdot N' \cdot d'^2}{\mu_c} = Re' \quad \text{et,} \quad [5.49]$$

$$We = \frac{\rho_c \cdot N^2 \cdot d^3}{\sigma} = \frac{\rho_c \cdot N'^2 \cdot d'^3}{\sigma} = We' \quad \text{et,} \quad [5.50]$$

$$N \cdot t = N' \cdot t' \quad [5.51]$$

De là, on observe que l'égalité simultanée aux deux échelles des nombres de Reynolds et de Weber (règles de similitude) aboutit à une impossibilité. L'égalité des nombres de Reynolds (équation 5.49) impose :

$$N = F_e^{-2} \cdot N' \quad [5.52]$$

alors l'égalité des nombres de Weber (équation 5.50) impose :

$$N = F_e^{-3/2} \cdot N' \quad [5.53]$$

En conséquence, il sera impossible de conserver simultanément ces deux mesures internes aux deux échelles : on doit se contenter d'une **similitude partielle**.

Remarquons que :

– l'égalité des nombres de Froude aux deux échelles (équation 5.48) impose de la même manière :

$$N = F_e^{-1/2} \cdot N' \quad [5.54]$$

Ceci confirme l'impossibilité de conserver simultanément les nombres de Reynolds, de Froude et de Weber aux deux échelles.

– en revanche, la conservation aux deux échelles de la mesure interne liée à la durée d'agitation (équation 5.51) ne posera pas de problème. En effet, la durée d'agitation t à imposer sur le prototype industriel pourra être aisément ajustée une fois le rapport des vitesses de rotation entre le prototype et la maquette N/N' fixé :

$$t = t' \cdot \frac{N'}{N} \quad [5.55]$$

On peut pousser plus loin l'analyse et établir précisément l'évolution du point de fonctionnement en fonction de la vitesse de rotation choisie pour le prototype :

– Cas n° 1 : $N = F_e^{-2} \cdot N'$ (égalité des nombres de Reynolds).

On a alors :

$$Re = Re' \quad \text{et} \quad Fr = F_e^{-3} \cdot Fr' \quad \text{et} \quad We = F_e^{-1} \cdot We' \quad [5.45]$$

– Cas n° 2 : $N = F_e^{-3/2} \cdot N'$ (égalité des nombres de Weber).

On a alors :

$$We = We' \quad \text{et} \quad Fr = F_e^{-2} \cdot Fr' \quad \text{et} \quad Re = F_e^{1/2} \cdot Re' \quad [5.46]$$

– Cas n° 3 : $N = F_e^{-1/2} \cdot N'$ (égalité des nombres de Froude).

On a alors :

$$Fr = Fr' \quad \text{et} \quad We = F_e^2 \cdot We' \quad \text{et} \quad Re = F_e^{3/2} \cdot Re' \quad [5.47]$$

Ces calculs montrent clairement qu'il sera impossible de conserver la même valeur de la mesure interne cible, d_{32}/d , aux deux échelles :

$$\frac{\left(\frac{d_{32}}{d}\right)}{\left(\frac{d'_{32}}{d'}\right)} \neq 1 \quad [5.48]$$

Par ailleurs, remarquons que dans ce problème, l'objectif est d'obtenir la même taille moyenne de gouttelettes aux deux échelles, et non la même valeur de la mesure interne cible, d_{32}/d ; en effet, si tel était le cas, le diamètre des gouttelettes à l'échelle industrielle serait directement lié au facteur d'échelle :

$$\frac{\left(\frac{d_{32}}{d}\right)}{\left(\frac{d'_{32}}{d'}\right)} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d_{32}}{d'} = \frac{d}{d'} = F_e \quad [5.49]$$

4.3. Apports de la connaissance de la relation de procédé pour le changement d'échelle

Face à ce cas de similitude partielle, *comment faut-il opérer pour conserver la taille des gouttelettes aux deux échelles ? Autrement dit, quel nombre sans dimension doit-on conserver en priorité ?*

Dans ce qui suit, nous allons répondre à ces questions. Pour cela, examinons les relations de procédés obtenues dans la littérature. Il existe de nombreux travaux en cuve agitée, conduits sous différentes conditions opératoires, dont le but est d'établir des corrélations semi-empiriques prédisant le diamètre moyen des gouttes. Zhou et Kresta (1998) et Xuereb *et al.* (2006) ont synthétisé les principales corrélations rencontrées et les domaines d'investigation explorés ; notons qu'elles sont généralement établies pour des agitateurs de type turbines Rushton en régime turbulent. À titre d'exemple, citons :

– la corrélation de Calderbank (1958) pour un agitateur à 4 pales :

$$\frac{d_{32}}{d} = 0,06 \cdot (1 + 3,75 \cdot \phi) \cdot We^{-3/5} \quad [5.50]$$

– la corrélation de Brown et Petit (1970) pour une turbine Rushton à 6 pales :

$$\frac{d_{32}}{d} = 0,05 \cdot (1 + 3,14 \cdot \phi) \cdot We^{-3/5} \quad [5.51]$$

L'examen des diverses corrélations montre clairement que le nombre de Weber a une influence majeure sur le diamètre moyen des gouttes, ainsi que la fraction volumique. En effet, la majorité des corrélations s'expriment, pour des paramètres matière et géométriques fixés, sous la forme :

$$\frac{d_{32}}{d} = C \cdot We^{-3/5} \quad [5.52]$$

où C est une constante.

En supposant que ce type de relation reste vraie pour des turbines dilacératrices, que la maquette et le prototype sont géométriquement semblables et mettent en jeu les mêmes paramètres matière, on peut alors écrire que, pour obtenir un diamètre de gouttelettes d_{32} dans le prototype égal à celui obtenu dans la maquette d'_{32} , il faut que :

$$\frac{(d_{32})'}{(d_{32})} = \frac{(We)^{-3/5} \cdot d}{(We')^{-3/5} \cdot d'} = \frac{(N^2 \cdot d^3)^{-3/5} \cdot d}{(N'^2 \cdot d'^3)^{-3/5} \cdot d'} = 1 \quad [5.53]$$

En introduisant le facteur d'échelle $F_e = d/d'$, l'équation 5.53 devient :

$$\left(\frac{N}{N'}\right)^{-6/5} \cdot F_e^{-9/5} \cdot F_e = 1 \quad [5.54]$$

et par suite :

$$N = F_e^{2/3} \cdot N' \quad [5.55]$$

où N et N' sont respectivement les vitesses de rotation de l'agitateur dans le prototype et dans la maquette.

Ainsi, la connaissance de la relation de procédé établie à l'échelle de la maquette est un élément essentiel pour définir les conditions de marche à adopter à l'échelle industrielle afin de pouvoir espérer obtenir une taille de gouttelettes identique à celle obtenue dans la maquette, à savoir :

$$T = \frac{T'}{F_e}, \quad d = \frac{d'}{F_e}, \quad C_b = \frac{C'_b}{F_e}, \quad H_L = \frac{H'_L}{F_e}, \quad w = \frac{w'}{F_e}, \quad \phi = \phi', \quad \sigma = \sigma', \quad \mu_c = \mu'_c, \\ \mu_d = \mu'_d, \quad \rho_c = \rho'_c, \quad \rho_d = \rho'_d, \quad N = F_e^{2/3} N' \text{ et } t = F_e^{-2/3} t' \quad [5.56]$$

Cependant, ne perdons pas de l'esprit que, même en imposant les conditions de marche définies dans l'équation 5.56, certaines mesures internes associées au point de fonctionnement du prototype se sont considérablement éloignées de leur valeur initiale de la maquette. On a en effet :

$$We = F_e^{13/3} \cdot We' \quad \text{et} \quad Fr = F_e^{7/3} Fr' \quad \text{et} \quad Re = F_e^{8/3} \cdot Re' \quad [5.57]$$

Pour évaluer les conséquences de l'équation 5.57 sur le diamètre de gouttelettes obtenu dans le prototype, il est impératif de vérifier que la relation de procédé qui a servi de base à notre raisonnement (équation 5.52) a bien été établie dans les gammes de nombres de Weber, de Froude et de Reynolds atteintes dans le prototype. Il se pourrait en effet que le déplacement du point de fonctionnement dans le prototype par rapport à celui dans la maquette se traduise par des changements de mécanismes dominants et donc par des modifications dans le processus de rupture/cohésion des gouttelettes. Typiquement, cela pourrait se manifester par l'apparition d'un vortex (dû à l'augmentation du nombre de Froude à l'échelle industrielle). Cependant, comme la valeur du nombre de Reynolds va aussi augmenter à l'échelle industrielle, on peut espérer ne pas trop modifier le mécanisme à l'origine de la rupture des gouttelettes.

5. ■ Cas particulier d'un changement d'échelle dans un procédé mettant en jeu un matériau ayant une propriété physique non constante

5.1. Préambule

Nous avons vu dans le chapitre 4 que le nombre de mesures internes caractérisant la configuration du système augmente en présence d'un matériau ayant une propriété physique non constante : la configuration matériau change et par voie de conséquence, la configuration complète du système.

Cette nouvelle configuration matériau peut être établie sans ambiguïté en s'appuyant sur la notion de fonction matériau adimensionnelle standard (c'est-à-dire sur l'adimensionalisation de la fonction matériau dimensionnelle par la méthode standard). Cette méthode présente le double avantage :

- d'offrir un cadre théorique pour respecter les principes de la théorie de similitude dans le cas de matériaux ayant une propriété physique non constante ;
- de définir une procédure répétable et applicable quelle que soit la fonction matériau dimensionnelle, cette procédure se déclinant différemment si la fonction matériau dimensionnelle présente des propriétés d'invariance et/ou si l'expression analytique de la fonction matériau est connue ou non.

Par conséquent, dans le cas d'un procédé mettant en jeu un matériau dont une propriété physique est non constante, la règle de similitude reste la même pour assurer une similitude complète entre le prototype industriel et la maquette de laboratoire : il s'agit d'obtenir l'identité d'un point de fonctionnement aux deux échelles. Ceci nécessite, comme n'importe quel autre cas de transposition, de conserver simultanément les valeurs numériques de l'ensemble des mesures internes définissant la configuration du système, y compris de l'ensemble des mesures internes associées à la non-constance de la propriété physique du matériau $\{\pi_m\}$. Nous allons illustrer cela à travers un dernier exemple guidé.

5.2. Exemple guidé n° 7 : dimensionnement d'un échangeur à surface raclée

Nous reprenons ici l'exemple proposé par Pawlowski (1991), traitant du dimensionnement d'un échangeur à surface raclée. L'objectif est d'illustrer comment la démarche de transposition des résultats doit être conduite quand le procédé fait intervenir un matériau dont une propriété physique est non constante. Il s'agit notamment de montrer comment, quand un matériau distinct est utilisé aux deux échelles, les choix du matériau modèle et/ou de l'abscisse de référence doivent être réalisés pour parvenir à une similitude complète.

5.2.1. Description du problème

La problématique est la suivante : un échangeur à surface raclée industriel doit être dimensionné afin de réchauffer un produit, au comportement newtonien et circulant à un débit volumique Q , d'une température d'entrée θ_e à une température de sortie θ_s . La température de paroi, θ_p , de l'échangeur à surface raclée est également imposée industriellement par le procédé de transformation.

Plus précisément le cahier des charges industriel à respecter est le suivant :

- température d'entrée du produit : $\theta_e = 102 \text{ }^\circ\text{C}$;
- température de sortie du produit : $\theta_s = 112 \text{ }^\circ\text{C}$;
- température de paroi : $\theta_p = 118 \text{ }^\circ\text{C}$;
- débit volumique de produit : $Q = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

La fonction matériau à considérer est la dépendance de la viscosité du produit avec la température $\mu(\theta)$. Pawlowski (1991) a vérifié que, dans la gamme de températures couverte, les propriétés physiques autres que la viscosité peuvent être considérées comme indépendantes de la température.

Pawlowski (1991) a montré que la fonction matériau standard adimensionnelle du produit peut être décrite par une fonction standard invariante. Cependant, la relation mathématique exacte liant la viscosité à la température n'est pas connue (voir chapitre 4, paragraphe 4.2.2 et chapitre 8, paragraphe 4).

En conséquence, doivent être ajoutés à la liste initiale des grandeurs physiques influençant la variable cible :

– la viscosité du produit calculée à une température de référence θ_0 , arbitrairement choisie : $\mu(\theta_0) = \mu_0$;

– le nombre sans dimension, $\pi_m = a_0 \cdot \theta_0^m$ qui apparaît dans l'argument u de la fonction matériau adimensionnelle standard w , soit :

$$a_0 \cdot \theta_0 = \frac{\theta_0}{\mu(\theta_0)} \cdot \left(\frac{d\mu(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} \quad [5.58]$$

Comme mentionné dans le chapitre 4 (paragraphe 4.1), Pawlowski (1991) énonce différemment cette règle et préconise de lister a_0 à la place de $a_0 \cdot \theta_0$. Ces deux approches sont parfaitement équivalentes ; cependant, dans la mesure où nous reprenons ici son exemple, nous avons adopté son approche. Dans le cas de la dépendance de la viscosité à la température, a_0 est classiquement appelé coefficient de température et noté γ_0 (voir équation 4.44).

La température de référence, θ_0 , n'est pas ajoutée à la liste car la fonction matériau a des propriétés d'invariance. Néanmoins, sa valeur doit être arbitrairement choisie car nécessaire au calcul de μ_0 et des autres propriétés physiques. Pawlowski (1991) la prend égale à la température moyenne entre les deux températures extrêmes rencontrées dans l'installation industrielle, soit :

$$\theta_0 = \frac{\theta_e + \theta_p}{2} = 110 \text{ }^\circ\text{C} \quad [5.59]$$

Les propriétés physiques du produit, calculées à cette température de référence sont :

- viscosité dynamique : $\mu_0 = 0,84 \text{ Pa}\cdot\text{s}$;
- coefficient de température de la viscosité : $\gamma_0 = 0,083 \text{ K}^{-1}$;
- masse volumique du produit : $\rho_0 = 897 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$;
- chaleur spécifique du produit : $c_{p0} = 1570 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
- conductivité thermique du produit : $\lambda_0 = 0,29 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Enfin, Pawlowski (1991) est contraint d'utiliser comme modèle réduit un appareil déjà disponible, sans doute pour ne pas réaliser d'investissement supplémentaire. La taille de la maquette est donc fixée par avance : $D' = 0,05 \text{ m}$. En conséquence, la géométrie de l'équipement industriel sera construite à l'identique de la maquette.

Le dimensionnement du prototype industriel nécessite de définir le diamètre de l'équipement, D , et la vitesse de rotation du rotor, N , à employer pour réaliser l'élévation de températures du produit escomptée. Il s'agit également de connaître la puissance mécanique P à mettre en œuvre pour que le rotor puisse être entraîné à la vitesse N .

La démarche proposée consiste :

– à fixer tout d'abord les conditions de marche de la maquette (nature des fluides à utiliser) pour être en capacité de réaliser une similitude avec l'échelle industrielle (prototype) ;

– puis à réaliser des expérimentations au niveau de la maquette (vitesse de rotation et puissance associée), pour être en capacité de prédire les grandeurs physiques à imposer au niveau du prototype.

5.2.2. Liste des grandeurs physiques indépendantes et détermination des nombres sans dimension

Dans ce problème, les variables cible sont la température de sortie du produit, θ_s , et la puissance mécanique P à mettre en œuvre pour entraîner le rotor. À partir des éléments présentés précédemment et dans le chapitre 4, il est possible d'établir la liste des grandeurs physiques indépendantes influençant les deux variables cibles :

$$\theta_s = f_{\theta_1} \left(D, Q, N, g, \theta_e, \theta_p, \mu_0, \gamma_0, \rho_0, c_{p_0}, \lambda_0 \right) \quad [5.60]$$

$$P = f_{P_1} \left(D, Q, N, g, \theta_e, \theta_p, \mu_0, \gamma_0, \rho_0, c_{p_0}, \lambda_0 \right) \quad [5.61]$$

où g est l'accélération de la pesanteur, f_{θ_1} et f_{P_1} désignent respectivement les fonctions liant les variables cibles θ_s et P aux grandeurs physiques dimensionnelles d'influence.

Ces espaces dimensionnels peuvent être d'emblée réduits à onze grandeurs physiques en introduisant les variables intermédiaires suivantes : $\theta_e - \theta_p$ et $\theta_s - \theta_p$. Les équations 5.60 et 5.61 deviennent alors :

$$\left(\theta_s - \theta_p \right) = f_{\theta_2} \left(D, Q, N, g, \left(\theta_e - \theta_p \right), \mu_0, \gamma_0, \rho_0, c_{p_0}, \lambda_0 \right) \quad [5.62]$$

$$P = f_{P_2} \left(D, Q, N, g, \left(\theta_e - \theta_p \right), \mu_0, \gamma_0, \rho_0, c_{p_0}, \lambda_0 \right) \quad [5.63]$$

Dans la suite, l'indice « 0 » lié aux propriétés du matériau calculées à la température de référence sera volontairement omis afin de simplifier les écritures.

Les équations 5.62 et 5.63 mettent en jeu onze grandeurs physiques dont les dimensions s'expriment par quatre dimensions fondamentales (L, M, T, K). En conséquence, ce problème se traduira par $11 - 4 = 7$ nombres sans dimension.

En écrivant les matrices aux dimensions associées aux équations 5.62 et 5.63, et en transformant leur matrice centrale en matrice identité, il est possible de montrer que les espaces des nombres sans dimension suivants, associées aux deux variables cibles, peuvent être obtenus, en prenant comme base (ρ, N, d, γ) :

$$T_s = \gamma \cdot (\theta_s - \theta_p) = F_{\theta 1} \left\{ \begin{array}{l} Re_N = \frac{\rho \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \quad Re_Q = \frac{\rho \cdot Q}{\mu \cdot D}, \quad Fr = \frac{N^2 \cdot D}{g}, \\ Br = \frac{\gamma \cdot \mu \cdot N^2 \cdot D^2}{\lambda}, \quad Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda}, \\ T_e = \gamma \cdot (\theta_e - \theta_p) \end{array} \right\} \quad [5.64]$$

$$N_p = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5} = F_P \left\{ \begin{array}{l} Re_N = \frac{\rho \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \quad Re_Q = \frac{\rho \cdot Q}{\mu \cdot D}, \quad Fr = \frac{N^2 \cdot D}{g}, \\ Br = \frac{\gamma \cdot \mu \cdot N^2 \cdot D^2}{\lambda}, \quad Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda}, \\ T_e = \gamma \cdot (\theta_e - \theta_p) \end{array} \right\} \quad [5.65]$$

où les nombres sans dimension Re_N , Re_Q , Fr , N_p , Br et Pr correspondent respectivement aux nombres de Reynolds tangentiel, de Reynolds axial, de Froude, de puissance, de Brinkman et de Prandtl. T_s et N_p représentent les mesures internes cibles du problème. Les six autres nombres sans dimension sont responsables des évolutions des deux variables cibles.

Des réarrangements de certains nombres sans dimension sont réalisés de façon à faire apparaître séparément dans un seul nombre les grandeurs physiques D , Q , N et P . On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_D = \left(\frac{Re_N^2}{Fr} \right)^{1/3} = D \cdot \left[g \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 \right]^{1/3} \\ \pi_Q = Re_Q \cdot \left(\frac{Re_N^2}{Fr} \right)^{1/3} = Q \cdot \left[g \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^5 \right]^{1/3} \\ \pi_N = \left(\frac{Fr^2}{Re_N} \right)^{1/3} = N \cdot \left[g^{-2} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right]^{1/3} \\ \pi_P = N_p \cdot \left(Re_N^7 \cdot Fr \right)^{1/3} = P \cdot \left[\left(\frac{\rho^4}{g \cdot \mu^7} \right) \right]^{1/3} \end{array} \right. \quad [5.66]$$

Un réarrangement du nombre de Brinkman permet également de faire apparaître un nombre sans dimension purement matériau, noté Γ , c'est-à-dire dont les variations dépendent uniquement des propriétés physiques du matériau :

$$\Gamma = \frac{Br}{(Re_N \cdot Fr)^{2/3} \cdot Pr^{5/3}} = \gamma \cdot \left(\frac{g^2 \cdot \lambda^2}{\rho^2 \cdot c_p^5} \right)^{1/3} \quad [5.67]$$

Au final, la configuration du système s'écrit donc :

$$T_s = F_{\theta_2}(\pi_D, \pi_Q, \pi_N, T_e, \Gamma, Pr) \quad [5.68]$$

$$\pi_P = F_{P_2}(\pi_D, \pi_Q, \pi_N, T_e, \Gamma, Pr) \quad [5.69]$$

Les conditions du problème, précisées en début d'exemple, permettent de fixer avant toute expérience les valeurs numériques de cinq de ces nombres dans le prototype industriel :

$$\begin{cases} \pi_Q = 31,6 \\ T_e = 0,336 \\ T_s = 0,126 \\ \Gamma = 2,14 \cdot 10^{-9} \\ Pr = 4,55 \cdot 10^3 \end{cases} \quad [5.70]$$

Par suite, le problème se résume à établir la relation entre π_D et π_N pour que T_s atteigne la valeur escomptée ; ceci revient à écrire l'égalité suivante :

$$\{\pi_D, \pi_N\} = 0 \quad [5.71]$$

5.2.3. Démarche d'extrapolation

Afin de respecter les conditions de similitude, et par suite, garantir que les phénomènes observés à l'échelle de la maquette et dans l'équipement industriel seront bien identiques (à savoir $T_s = T_s'$ et $\pi_P = \pi_P'$), il faut maintenir les mêmes points de fonctionnement aux deux échelles, soit :

$$\begin{cases} \pi_D = \pi_D' \\ \pi_Q = \pi_Q' \\ \pi_N = \pi_N' \\ T_e = T_e' \\ \Gamma = \Gamma' \\ Pr = Pr' \end{cases} \quad [5.72]$$

Selon la convention utilisée dans les précédents exemples guidés, les nombres sans dimension exprimés avec et sans les primes font respectivement référence à l'échelle liée à la maquette et l'échelle du prototype industriel.

– **Étape 1** : définition du produit modèle et de la température de référence dans la maquette.

Les égalités simultanées des deux nombres purement matériau, Γ et Pr , aux deux échelles fixent les caractéristiques du fluide à utiliser sur la maquette. Il en découle que les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \gamma \cdot \left(\frac{g^2 \cdot \lambda^2}{\rho^2 \cdot c_p^5} \right)^{1/3} = \Gamma' = \gamma' \cdot \left(\frac{g'^2 \cdot \lambda'^2}{\rho'^2 \cdot c_p'^5} \right)^{1/3} \\ Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda} = Pr' = \frac{c_p' \cdot \mu'}{\lambda'} \end{array} \right. \quad [5.73]$$

La connaissance du fluide réel (celui utilisé à l'échelle industrielle) et de la température prise pour référence dans le prototype permet de fixer les grandeurs suivantes :

$$\theta_0 = 110^\circ\text{C}, \mu(\theta_0), \rho(\theta_0), \lambda(\theta_0), c_p(\theta_0) \quad [5.74]$$

À partir de là, un fluide approprié peut être sélectionné et une nouvelle température de référence choisie pour les essais sur maquette. À cet effet, Pawlowski (1991) a établi, pour différents fluides purs et différents mélanges de fluides, des cartographies reportant le nombre sans dimension Γ en fonction du nombre de Prandtl Pr , et paramétrées par la température θ . Il a alors montré qu'il était possible de déterminer un fluide et définir une température de référence à l'échelle de la maquette, θ'_0 telle que $Pr = Pr'$ et $\Gamma = \Gamma'$.

Il faut bien garder à l'esprit que toutes les propriétés physiques des fluides réels et de ceux utilisés dans la maquette sont définies à une température de référence, respectivement θ_0 et θ'_0 . La détermination du fluide modèle et de ses propriétés $\mu', \rho', \lambda', c_p'$, se fait donc à la température de référence θ'_0 . On définit ainsi simultanément les caractéristiques du fluide modèle et la température de référence de la maquette :

$$\theta'_0, \mu(\theta'_0), \rho'(\theta'_0), \lambda'(\theta'_0), c_p'(\theta'_0) \quad [5.75]$$

Pawlowski (1991) précise que le fluide modèle retenu pour la maquette est un mélange d'huiles de Baysilon (76 % M10 et 24 % M1000) à 25 °C.

– **Étape 2** : définition de la taille de l'équipement industriel, D .

La connaissance des propriétés physiques du fluide à l'échelle de la maquette permet de calculer le diamètre du rotor dans le prototype industriel, D , à partir de l'égalité simultanée aux deux échelles :

$$\pi_D = \pi'_D \quad [5.76]$$

Le diamètre du rotor de la maquette, D' , étant connu, on en déduit :

$$D = D' \cdot \left(\frac{\rho'/\mu'}{\rho/\mu} \right)^{2/3} \quad [5.77]$$

– **Étape 3** : définition des conditions de température.

Une fois définies, les caractéristiques du fluide et la température de référence à l'échelle de la maquette, il est possible de déterminer les conditions de températures à imposer à cette échelle et ainsi définir θ'_e , θ'_s et θ'_p à partir du système à trois inconnues et trois équations suivant :

$$\begin{cases} \theta'_0 = \frac{\theta'_e + \theta'_p}{2} \\ \gamma' \cdot (\theta'_e - \theta'_p) = T'_e \\ \gamma' \cdot (\theta'_s - \theta'_p) = T'_s \end{cases} \quad [5.78]$$

En effet, l'égalité aux deux échelles des nombres sans dimension T'_e et T'_s impose :

$$\begin{cases} T'_e = T_e \\ T'_s = T_s \end{cases} \quad [5.79]$$

où les valeurs de T_e et de T_s sont données dans l'équation 5.70.

– **Étape 4** : définition du débit volumique Q' .

La connaissance du débit volumique Q dans le prototype et des propriétés du fluide modèle dans la maquette permet de déduire la valeur du débit volumique à imposer pour la maquette :

$$Q' = \pi_Q \cdot \left[g \cdot \left(\frac{\rho'}{\mu'} \right)^5 \right]^{-1/3} \quad [5.80]$$

où la valeur de π_Q est donnée dans l'équation 5.70.

– **Étape 5** : réalisation des essais sur maquette.

L'objectif de ce travail est la définition des vitesses de rotation N et de la puissance P à installer dans le prototype industriel.

L'expérimentation consiste alors à trouver la vitesse de rotation du rotor de la maquette, N' , pour laquelle la température du produit en sortie atteint θ'_s , puis de mesurer expérimentalement la puissance P' correspondante pour atteindre ce point de fonctionnement.

Ensuite, la vitesse de rotation à imposer N (respectivement la puissance P à installer) à l'échelle industrielle sont calculées à partir de l'égalité simultanée aux deux échelles des nombres sans dimension π_N et N_e :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = N' \cdot \frac{(\mu'/\rho')^{1/3}}{(\mu/\rho)^{1/3}} \\ P = P' \cdot \left(\frac{\rho'^4/\mu'^7}{\rho^4/\mu^7} \right)^{1/3} \end{array} \right. \quad [5.81]$$

5.2.4. Conclusion

Cet exemple guidé montre que la transposition d'échelle en présence d'un matériau ayant une propriété physique non constante se traite de la même façon que dans le cas où la propriété est constante. Il faut néanmoins ajouter des règles de similitude supplémentaires, celles découlant de la similitude matériau.