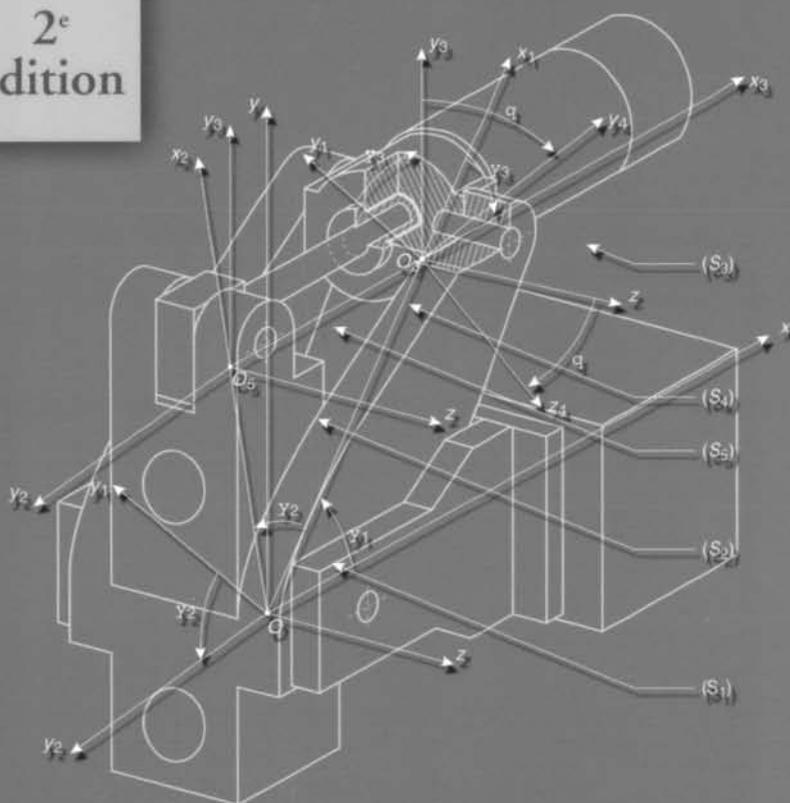


Jean-Marie Berthelot

# Mécanique des solides rigides

2<sup>e</sup>  
édition



Éditions  
**TEC**  
& **DOC**

*Lavoisier*



# Mécanique des solides rigides



# Mécanique des solides rigides

Jean-Marie Berthelot

2<sup>e</sup> édition



11, rue Lavoisier  
75008 Paris

## Du même auteur

*Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*  
J.-M. Berthelot, Tec & Doc, 2005

## Également disponibles

*Ingénierie de la fiabilité*  
P. Lyonnet, Tec & Doc, 2006

*Éléments finis pour l'ingénieur : grands principes et petites recettes*  
Collection EDF R&D  
P. Thomas, Tec & Doc, 2006

*Élaboration, microstructure et comportement des matériaux composites à matrice polymère*  
Série Polymères (Traité MIM)  
J. Renard (coord.), Hermes, 2005

*Fiabilité des structures - Couplage mécano-fiabiliste statique*  
Collection Génie civil  
M. Lemaire en collaboration avec A. Chateaufneuf et J.-C. Mitteau, Hermes, 2005

*Dynamique des structures - Application aux ouvrages de génie civil*  
Collection Génie civil  
P. Paultre, Hermes, 2005

*Comportement mécanique du béton*  
Série Matériaux de construction (Traité MIM)  
J.-M. Reynouard, G. Pijaudier-Cabot (coord.), Hermes, 2005

*Comportement dynamique des bétons et génie parasismique*  
Série Matériaux de construction (Traité MIM)  
Mazars J., Millard A. (coord.), Hermes, 2004



© LAVOISIER, 2006

ISBN 10 : 2-7430-0908-X (2<sup>e</sup> édition, 2006)

ISBN 13 : 978-2-7430-0908-3 (2<sup>e</sup> édition, 2006)

ISBN : 2-7430-0359-6 (1<sup>re</sup> édition, 1999)

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et, d'autre part, les analyses et courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (loi du 1<sup>er</sup> juillet 1992 – art. L 122-4 et L 122-5 et Code pénal art. 425).

# Avant-propos

Cet ouvrage développe les fondements de la mécanique des solides indéformables. Il s'adresse aux étudiants de premier cycle des universités (DEUG et DUT) et des classes préparatoires, ainsi qu'aux étudiants de licence et de première année d'école d'ingénieur. L'ouvrage est issu des enseignements de mécanique effectués par l'auteur au fil du temps et bénéficie ainsi d'une longue expérience avec les étudiants.

Le contenu et la progression ont été conçus avec deux objectifs principaux : 1. avoir une progression des difficultés de manière à faciliter l'accès aux étudiants des premiers cycles ; 2. mettre en place un formalisme qui conduise à uniformiser l'analyse des problèmes de mécanique d'un solide ou d'un ensemble de solides. L'ouvrage est divisé en six parties.

La première partie, *Éléments de mathématiques*, traite des outils classiques du mécanicien : espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , espace géométrique, dérivées vectorielles, courbes. Un chapitre est consacré aux torseurs, dont le concept constitue la clef de l'ouvrage. La notion générale de centre de mesure est introduite dans le cadre de ce chapitre.

La deuxième partie, *Cinématique*, débute par l'étude du mouvement d'un point (la cinématique du point). Des mouvements particuliers sont ensuite étudiés, un chapitre étant réservé aux mouvements à accélération centrale. Vient ensuite l'étude de la cinématique d'un solide : paramètres de situation, torseur cinématique, étude de mouvements particuliers. Nous avons exclu volontairement de cette partie le problème de changement de repère qui conduit à introduire la notion « d'entraînement ». Cette notion n'est pas assimilée par les étudiants à ce niveau. Par contre, elle s'introduit tout naturellement dans le cadre du concept du torseur cinématique. Le changement de repère sera considéré en tant que tel dans le cadre de la cinétique (quatrième partie).

La troisième partie, *Actions mécaniques*, traite d'abord des généralités sur les actions exercées sur un solide ou un ensemble de solides. Représentées par des torseurs, les actions mécaniques ont des propriétés générales qui en sont dérivées. Un chapitre est consacré aux actions de liaison, dont le concept est à la base de la conception technologique des systèmes mécaniques. L'introduction de la puissance développée simplifie grandement les restrictions imposées dans le cas de liaisons parfaites. L'étude de quelques problèmes de statique familiarisera le lecteur avec l'analyse des actions mécaniques.

La quatrième partie, *Cinétique des solides*, introduit les outils nécessaires pour aborder les problèmes de dynamique des ensembles de solides : opérateur d'inertie, torseur cinétique, torseur dynamique et énergie cinétique. Le problème du changement de repère est ensuite analysé.

À ce stade, le lecteur possède tous les éléments pour traiter les problèmes de la dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, objets de la cinquième partie, *Dynamique des solides*. Après avoir mis en place le schéma général d'analyse d'un problème de dynamique, quelques problèmes particuliers sont traités. La démarche est toujours la même : obtention des équations de la dynamique à l'aide du principe fondamental de la dynamique, hypothèses sur les liaisons entre les solides, équations de mouvement et équations de liaisons. Le concepteur aura à s'intéresser aussi bien aux paramètres de mouvement qu'aux actions exercées au niveau des liaisons dans le cadre d'un dimensionnement des systèmes mécaniques. L'application du principe fondamental de la dynamique permet d'accéder à toutes les équations de la mécanique. Toutefois, l'utilisateur qui ne s'intéresse qu'aux équations de mouvement a besoin d'un outil systématique pour les obtenir : les équations de Lagrange, qui sont développées dans le dernier chapitre de cette partie.

Les équations de mouvement d'un solide ou d'un ensemble de solides sont généralement complexes, et la plupart des équations ne peuvent être résolues par une méthode analytique. Le mécanicien a aujourd'hui à sa disposition tous les outils numériques nécessaires pour résoudre les équations de mouvement, quelle que soit leur complexité. La sixième partie, *Méthodes numérique de résolution des équations de mouvement*, en est une introduction.

Ce traité montre ainsi que l'analyse complète d'un problème de Mécanique d'un Solide ou d'un Système de Solides Rigides s'effectue toujours suivant le même processus : 1. faire l'analyse cinématique du mouvement du solide ou des solides, 2. effectuer l'analyse cinétique, 3. caractériser les actions mécaniques exercées, 4. appliquer le principe fondamental de la dynamique.

L'objet de ce traité a donc été de mettre en place progressivement les divers outils nécessaires pour effectuer l'ensemble de ce processus d'analyse. Il en résulte que l'analyse complète d'un système réel ne peut être effectuée que lorsque l'ensemble des outils est parfaitement maîtrisé. Dans le développement de l'ouvrage, il a donc été choisi d'illustrer l'utilisation des divers outils en les appliquant à des exemples très simples, à chaque étape de leur mise en place. Des exercices sont proposés à la suite de la plupart des chapitres. Ils ont été introduits à titre d'illustration et, par conséquent, le nombre en a été volontairement limité.

De brefs commentaires ont été ajoutés à la fin de chaque chapitre. Ces commentaires résument les principaux éléments introduits dans les chapitres en insistant sur les notions les plus importantes à assimiler.

La correction des exercices est reportée à la fin de l'ouvrage de manière à ne pas morceler la continuité de la procédure d'analyse d'un problème de Mécanique des Solides. La rédaction des corrigés a été volontairement développée et structurée de manière à améliorer la capacité de raisonnement du lecteur.

À la fin de l'ouvrage et de la compréhension des concepts fondamentaux introduits, le concepteur possédera alors tous les éléments qui lui permettront de conduire une analyse mécanique complète et structurée des systèmes mécaniques qu'il aura à étudier.

Mars 2006

Jean-Marie BERTHELOT



# Table des matières

Avant-propos	V
<b>PARTIE I Éléments de mathématiques</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 Espace vectoriel <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>3</b>
<b>1.1 Définition de l'espace vectoriel <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>3</b>
1.1.1 Vecteurs	3
1.1.2 Loi de composition interne ou somme vectorielle	3
1.1.3 Loi de composition externe ou multiplication par un nombre réel	4
<b>1.2 Dépendance et indépendance linéaire. Base de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>5</b>
1.2.1 Combinaison linéaire	5
1.2.2 Dépendance et indépendance linéaire	5
1.2.3 Base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$	7
1.2.4 Composantes d'un vecteur	7
<b>1.3 Produit scalaire</b>	<b>8</b>
1.3.1 Définition	8
1.3.2 Intensité ou norme d'un vecteur	8
1.3.3 Expression analytique du produit scalaire dans une base quelconque.	9
1.3.4 Vecteurs orthogonaux	9
1.3.5 Base orthonormée	9
1.3.6 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée	10
<b>1.4 Produit vectoriel</b>	<b>10</b>
1.4.1 Définition	10
1.4.2 Expression analytique du produit vectoriel dans une base quelconque.	11
1.4.3 Base directe	11
1.4.4 Expression du produit vectoriel dans une base directe	12
1.4.5 Produit mixte	12
1.4.6 Propriété du double produit vectoriel	12
<b>1.5 Bases de l'espace vectoriel <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>13</b>
1.5.1 Base canonique	13
1.5.2 Changement de base	13
<b>Exercices</b>	<b>16</b>
<b>Commentaires</b>	<b>17</b>
<b>CHAPITRE 2 L'espace géométrique</b>	<b>18</b>
<b>2.1 L'espace géométrique considéré comme l'espace affine de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>18</b>

2.1.1	L'espace géométrique . . . . .	18
2.1.2	Conséquences . . . . .	19
2.1.3	Distance entre deux points . . . . .	20
2.1.4	Angle entre deux bipoints . . . . .	20
2.1.5	Repères . . . . .	21
<b>2.2</b>	<b>Sous-espaces de l'espace géométrique : droite, plan . . . . .</b>	<b>22</b>
2.2.1	Droite . . . . .	22
2.2.2	Plan . . . . .	23
2.2.3	Droites et plans de mêmes directions . . . . .	24
2.2.4	Droites et plans orthogonaux . . . . .	25
<b>2.3</b>	<b>Repérage d'un point de l'espace géométrique . . . . .</b>	<b>26</b>
2.3.1	Axes de coordonnées . . . . .	26
2.3.2	Repère orthonormé direct . . . . .	27
2.3.3	Coordonnées cartésiennes . . . . .	27
<b>2.4</b>	<b>Équations du plan et de la droite . . . . .</b>	<b>29</b>
2.4.1	Équation cartésienne d'un plan . . . . .	29
2.4.2	Équation cartésienne d'une droite . . . . .	30
<b>2.5</b>	<b>Changement de repère . . . . .</b>	<b>31</b>
2.5.1	Cas général . . . . .	31
2.5.2	Repères ayant un axe confondu . . . . .	32
2.5.3	Repères quelconques ayant même origine . . . . .	34
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>39</b>
 <b>CHAPITRE 3 Fonction vectorielle. Dérivées . . . . .</b>		<b>40</b>
<b>3.1</b>	<b>Fonction vectorielle d'une variable . . . . .</b>	<b>40</b>
3.1.1	Définition . . . . .	40
3.1.2	Dérivée . . . . .	40
3.1.3	Propriétés de la dérivée vectorielle . . . . .	41
3.1.4	Exemples . . . . .	42
<b>3.2</b>	<b>Fonction vectorielle de deux variables . . . . .</b>	<b>44</b>
3.2.1	Définition . . . . .	44
3.2.2	Dérivées partielles . . . . .	44
3.2.3	Exemples . . . . .	45
<b>3.3</b>	<b>Fonction vectorielle de <math>n</math> variables . . . . .</b>	<b>45</b>
3.3.1	Définitions . . . . .	45
3.3.2	Exemples . . . . .	46
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>49</b>
 <b>CHAPITRE 4 Rappels sur les courbes . . . . .</b>		<b>50</b>
<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>Abscisse curviligne. Longueur d'un arc de courbe . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>4.3</b>	<b>Tangente. Normale. Rayon de courbure . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>4.4</b>	<b>Repère de Frénet . . . . .</b>	<b>52</b>
	<b>Exercice . . . . .</b>	<b>54</b>
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>54</b>

<b>CHAPITRE 5 Torseurs</b>	<b>55</b>
<b>5.1 Définition et propriétés des torseurs</b>	<b>55</b>
5.1.1 Définitions et notations	55
5.1.2 Propriétés des vecteurs-moments	56
5.1.3 Espace vectoriel des torseurs	56
5.1.4 Invariant scalaire d'un torseur	57
5.1.5 Produit de deux torseurs	58
5.1.6 Moment d'un torseur par rapport à un axe	58
5.1.7 Axe central d'un torseur	59
<b>5.2 Torseurs particuliers. Décomposition d'un torseur quelconque</b>	<b>60</b>
5.2.1 Glisseur	60
5.2.2 Torseur-couple	62
5.2.3 Torseur quelconque	63
5.2.4 Conclusions	64
<b>5.3 Torseurs associés à un champ de glisseurs défini sur un domaine de l'espace géométrique</b>	<b>64</b>
5.3.1 Torseur associé à un ensemble de points dénombrables	64
5.3.2 Torseur associé à un ensemble continu	65
5.3.3 Cas particulier important. Centre de mesure	67
<b>Exercices</b>	<b>70</b>
<b>Commentaires</b>	<b>72</b>
<b>PARTIE II Cinématique</b>	<b>73</b>
<b>CHAPITRE 6 Cinématique du point</b>	<b>75</b>
<b>6.1 Introduction</b>	<b>75</b>
<b>6.2 Trajectoire et vecteurs cinématiques d'un point</b>	<b>75</b>
6.2.1 Trajectoire	76
6.2.2 Vecteurs cinématiques	77
6.2.3 Composantes normales et tangentielles des vecteurs cinématiques	78
6.2.4 Divers types de mouvements	79
<b>6.3 Expressions des composantes des vecteurs cinématiques en fonction des coordonnées cartésiennes ou cylindriques</b>	<b>81</b>
6.3.1 Coordonnées cartésiennes	81
6.3.2 Coordonnées cylindriques	82
<b>Exercices</b>	<b>83</b>
<b>Commentaires</b>	<b>83</b>
<b>CHAPITRE 7 Étude de mouvements particuliers</b>	<b>84</b>
<b>7.1 Mouvements à trajectoire rectiligne</b>	<b>84</b>
7.1.1 Généralités	84
7.1.2 Mouvement rectiligne uniforme	85
7.1.3 Mouvement rectiligne uniformément varié	85
7.1.4 Mouvement rectiligne vibratoire simple	86
<b>7.2 Mouvements à trajectoire circulaire</b>	<b>87</b>
7.2.1 Équations générales	87

7.2.2	Mouvement circulaire uniforme . . . . .	88
7.2.3	Mouvement circulaire uniformément varié . . . . .	89
<b>7.3</b>	<b>Mouvements à vecteur accélération constant</b> . . . . .	<b>90</b>
7.3.1	Équations générales . . . . .	90
7.3.2	Étude du cas où la trajectoire est rectiligne . . . . .	91
7.3.3	Étude du cas où la trajectoire est parabolique . . . . .	92
<b>7.4</b>	<b>Mouvement hélicoïdal</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>7.5</b>	<b>Mouvement cycloïdal</b> . . . . .	<b>96</b>
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>98</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>CHAPITRE 8 Mouvements à accélération centrale</b>		<b>100</b>
<b>8.1</b>	<b>Propriétés générales</b> . . . . .	<b>100</b>
8.1.1	Définition . . . . .	100
8.1.2	Un mouvement à accélération centrale est un mouvement à trajectoire plane . . . . .	100
8.1.3	Vitesse aréolaire . . . . .	101
8.1.4	Loi des aires . . . . .	102
8.1.5	Expression des vecteurs cinématiques . . . . .	102
8.1.6	Équation polaire de la trajectoire . . . . .	102
8.1.7	Mouvements pour lesquels $\vec{a}^{(T)}(M,t) = -\omega^2 \overline{OM}$ . . . . .	103
<b>8.2</b>	<b>Mouvements à accélération centrale pour lesquels <math>\vec{a}^{(T)}(M,t) = -K \frac{\overline{OM}}{OM^3}</math></b>	<b>104</b>
8.2.1	Équations des trajectoires . . . . .	104
8.2.2	Étude des trajectoires . . . . .	105
8.2.3	Intensité de la vitesse en un point de la trajectoire . . . . .	107
8.2.4	Mouvement elliptique. Lois de Kepler . . . . .	108
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>110</b>
<b>CHAPITRE 9 Cinématique du solide</b>		<b>111</b>
<b>9.1</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>111</b>
9.1.1	Notion de solide indéformable . . . . .	111
9.1.2	Repérage d'un solide . . . . .	111
<b>9.2</b>	<b>Relations entre les trajectoires et les vecteurs cinématiques de deux points liés à un solide</b> . . . . .	<b>113</b>
9.2.1	Relation entre les trajectoires . . . . .	113
9.2.2	Relation entre les vecteurs vitesses . . . . .	114
9.2.3	Expression du vecteur rotation instantané . . . . .	115
9.2.4	Torseur cinématique . . . . .	116
9.2.5	Relation entre les vecteurs accélérations . . . . .	117
<b>9.3</b>	<b>Généralisation de la composition des mouvements</b> . . . . .	<b>118</b>
9.3.1	Composition des torseurs cinématiques . . . . .	118
9.3.2	Mouvements inverses . . . . .	120
<b>9.4</b>	<b>Exemples de mouvements de solides</b> . . . . .	<b>121</b>
9.4.1	Mouvement de rotation autour d'un axe . . . . .	121
9.4.2	Mouvement de translation d'un solide . . . . .	124

9.4.3	Mouvement d'un solide soumis à une liaison verrou . . . . .	125
9.4.4	Mouvement de rotation autour d'un point . . . . .	127
9.4.5	Mouvement plan sur plan . . . . .	129
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>134</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>136</b>
 <b>CHAPITRE 10 Cinématique de solides en contact</b>		<b>137</b>
<b>10.1</b>	<b>Cinématique de deux solides en contact</b> . . . . .	<b>137</b>
10.1.1	Solides en contact ponctuel. Glissement . . . . .	137
10.1.2	Pivotement et roulement . . . . .	138
10.1.3	Conclusions . . . . .	139
10.1.4	Solides en contact en plusieurs points . . . . .	140
<b>10.2</b>	<b>Transmission de mouvements de rotation</b> . . . . .	<b>140</b>
10.2.1	Généralités . . . . .	140
10.2.2	Transmission par friction . . . . .	141
10.2.3	Transmission par engrenages . . . . .	145
10.2.4	Transmission par courroie . . . . .	148
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>150</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>151</b>
 <b>PARTIE III Les actions mécaniques</b>		<b>153</b>
 <b>CHAPITRE 11 Généralités sur les actions mécaniques</b>		<b>155</b>
<b>11.1</b>	<b>Concepts relatifs aux actions mécaniques</b> . . . . .	<b>155</b>
11.1.1	Notion d'action mécanique . . . . .	155
11.1.2	Représentation d'une action mécanique . . . . .	155
11.1.3	Classification des actions mécaniques . . . . .	156
11.1.4	Actions mécaniques s'exerçant entre les ensembles matériels . . . . .	158
11.1.5	Actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un ensemble matériel . . . . .	158
<b>11.2</b>	<b>Divers types d'actions mécaniques</b> . . . . .	<b>159</b>
11.2.1	Natures physiques des actions mécaniques . . . . .	159
11.2.2	Environnement et actions efficaces . . . . .	159
<b>11.3</b>	<b>Puissance et travail</b> . . . . .	<b>160</b>
11.3.1	Définition de la puissance . . . . .	160
11.3.2	Changement de repères . . . . .	161
11.3.3	Énergie potentielle . . . . .	161
11.3.4	Travail . . . . .	162
11.3.5	Puissance et travail d'une force . . . . .	163
11.3.6	Ensemble de solides . . . . .	164
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>165</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>167</b>
 <b>CHAPITRE 12 Gravitation. Pesanteur. Centre de masse</b>		<b>169</b>
<b>12.1</b>	<b>Phénomène de gravitation</b> . . . . .	<b>169</b>
12.1.1	Loi de la gravitation . . . . .	169

12.1.2	Champ gravitationnel . . . . .	170
12.1.3	Action de gravitation créée par une sphère . . . . .	170
12.1.4	Action de gravitation terrestre . . . . .	172
<b>12.2</b>	<b>Action de pesanteur . . . . .</b>	<b>173</b>
12.2.1	Champ de pesanteur terrestre . . . . .	173
12.2.2	Action de pesanteur exercée sur un ensemble matériel . . . . .	174
12.2.3	Puissance développée par l'action de pesanteur . . . . .	175
<b>12.3</b>	<b>Détermination du centre de masse . . . . .</b>	<b>177</b>
12.3.1	Centre de masse d'un ensemble matériel . . . . .	177
12.3.2	Centre de masse de la réunion de deux ensembles . . . . .	178
12.3.3	Centre de masse d'un ensemble homogène . . . . .	179
12.3.4	Corps homogènes présentant des symétries géométriques . . . . .	180
<b>12.4</b>	<b>Exemples de détermination de centres de masse . . . . .</b>	<b>181</b>
12.4.1	Demi-boule homogène . . . . .	181
12.4.2	Solide homogène à géométrie complexe . . . . .	182
12.4.3	Solide non homogène . . . . .	183
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>184</b>
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>185</b>
<b>CHAPITRE 13 Actions de contact entre solides. Liaisons . . . . .</b>		<b>186</b>
<b>13.1</b>	<b>Lois du contact entre solides . . . . .</b>	<b>186</b>
13.1.1	Introduction . . . . .	186
13.1.2	Contact ponctuel . . . . .	186
13.1.3	Couples de roulement et pivotement . . . . .	191
<b>13.2</b>	<b>Liaisons . . . . .</b>	<b>192</b>
13.2.1	Introduction . . . . .	192
13.2.2	Classification des liaisons . . . . .	193
13.2.3	Action de liaison . . . . .	197
13.2.4	Liaison sans frottement . . . . .	198
13.2.5	Liaison avec frottement . . . . .	202
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>203</b>
<b>CHAPITRE 14 Statique d'un solide et d'un ensemble de solides . . . . .</b>		<b>204</b>
<b>14.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>204</b>
<b>14.2</b>	<b>Lois de la statique . . . . .</b>	<b>204</b>
14.2.1	Cas d'un solide . . . . .	204
14.2.2	Cas d'un ensemble de solides . . . . .	205
14.2.3	Actions mutuelles . . . . .	206
<b>14.3</b>	<b>Statique des fils ou câbles souples . . . . .</b>	<b>207</b>
14.3.1	Action mécanique exercée par un fil ou un câble souple . . . . .	207
14.3.2	Équation de la statique d'un fil . . . . .	208
14.3.3	Fil ou câble souple soumis à l'action de pesanteur . . . . .	209
14.3.4	Contact d'un fil avec un solide . . . . .	210
<b>14.4</b>	<b>Exemples d'équilibres . . . . .</b>	<b>212</b>
14.4.1	Cas d'un solide . . . . .	212
14.4.2	Cas d'un ensemble de deux solides . . . . .	217
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>222</b>
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>223</b>

<b>PARTIE IV Cinétique des solides</b>	<b>225</b>
<b>CHAPITRE 15 L'opérateur d'inertie</b>	<b>227</b>
<b>15.1 Introduction de l'opérateur d'inertie</b>	<b>227</b>
15.1.1 Opérateur associé à un produit vectoriel	227
15.1.2 Extension du résultat précédent	228
15.1.3 Opérateur d'inertie	229
<b>15.2 Changement de repère</b>	<b>230</b>
15.2.1 Changement d'origine	230
15.2.2 Relation de Huyghens	232
15.2.3 Diagonalisation de la matrice d'inertie	232
15.2.4 Changement de base	233
<b>15.3 Moments d'inertie par rapport à un point, un axe, un plan</b>	<b>234</b>
15.3.1 Définitions	234
15.3.2 Relations entre les moments d'inertie	235
15.3.3 Cas d'un solide plan	235
15.3.4 Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque	236
<b>15.4 Détermination des matrices d'inertie</b>	<b>237</b>
15.4.1 Solides à symétries matérielles	237
15.4.2 Solide ayant une symétrie de révolution	239
15.4.3 Solide ayant une symétrie sphérique	241
15.4.4 Associativité	242
<b>15.5 Matrices d'inertie de solides homogènes</b>	<b>244</b>
15.5.1 Solides linéiques	244
15.5.2 Solides surfaciques	245
15.5.3 Solides volumiques	249
<b>Exercices</b>	<b>253</b>
<b>Commentaires</b>	<b>254</b>
<b>CHAPITRE 16 Torseur cinétique. Torseur dynamique. Énergie cinétique</b>	<b>255</b>
<b>16.1 Torseur cinétique</b>	<b>255</b>
16.1.1 Définition	255
16.1.2 Torseur cinétique associé au mouvement d'un solide	256
16.1.3 Torseur cinétique d'un ensemble de solides	257
<b>16.2 Torseur dynamique</b>	<b>258</b>
16.2.1 Définition	258
16.2.2 Torseur dynamique associé au mouvement d'un solide	258
16.2.3 Torseur dynamique d'un ensemble de solides	259
16.2.4 Relation avec le torseur cinétique	260
<b>16.3 Énergie cinétique</b>	<b>260</b>
16.3.1 Définition	260
16.3.2 Énergie cinétique d'un solide	261
16.3.3 Énergie cinétique d'un ensemble de solides	262
16.3.4 Dérivée de l'énergie cinétique d'un solide par rapport au temps	262
<b>Exercices</b>	<b>263</b>
<b>Commentaires</b>	<b>264</b>

<b>CHAPITRE 17</b>	<b>Changement de repère</b>	<b>265</b>
<b>17.1</b>	<b>Cinématique du changement de repère</b>	<b>265</b>
17.1.1	Relation entre les torseurs cinématiques	265
17.1.2	Relation entre les vecteurs vitesses. Vitesse d'entraînement	266
17.1.3	Composition des vecteurs accélérations	268
<b>17.2</b>	<b>Torseurs dynamiques</b>	<b>269</b>
17.2.1	Torseur d'inertie d'entraînement	270
17.2.2	Torseur d'inertie de Coriolis	271
17.2.3	Relation entre les torseurs dynamiques définis dans deux repères différents	272
	<b>Commentaires</b>	<b>273</b>
<b>PARTIE V</b>	<b>Dynamique des solides</b>	<b>275</b>
<b>CHAPITRE 18</b>	<b>Le principe fondamental de la dynamique et ses conséquences</b>	<b>277</b>
<b>18.1</b>	<b>Principe fondamental</b>	<b>277</b>
18.1.1	Énoncé du principe fondamental de la dynamique	277
18.1.2	Classe des repères galiléens	277
18.1.3	Équations vectorielles déduites du principe fondamental	278
18.1.4	Équations scalaires déduites du principe fondamental	279
<b>18.2</b>	<b>Actions mutuelles</b>	<b>280</b>
18.2.1	Théorèmes des actions mutuelles	280
18.2.2	Transmission d'actions mécaniques	281
<b>18.3</b>	<b>Théorème de l'énergie-puissance</b>	<b>281</b>
18.3.1	Cas d'un solide	281
18.3.2	Cas d'un ensemble de solides	282
18.3.3	Cas où les actions mécaniques admettent une énergie potentielle	283
<b>18.4</b>	<b>Application du principe fondamental à l'étude du mouvement d'un solide libre dans un repère galiléen</b>	<b>284</b>
18.4.1	Problème général	284
18.4.2	Cas particuliers	286
<b>18.5</b>	<b>Application au système solaire</b>	<b>288</b>
18.5.1	Repère galiléen	288
18.5.2	Mouvement des planètes	290
18.5.3	La Terre dans le système solaire	290
	<b>Commentaires</b>	<b>291</b>
<b>CHAPITRE 19</b>	<b>L'équation fondamentale de la dynamique dans les divers repères utilisés en mécanique</b>	<b>293</b>
<b>19.1</b>	<b>Généralités</b>	<b>293</b>
19.1.1	Équation fondamentale de la dynamique dans un repère non galiléen	293
19.1.2	Les repères utilisés en mécanique	294
<b>19.2</b>	<b>Relation fondamentale de la dynamique dans le repère géocentrique</b>	<b>295</b>
19.2.1	Équations générales	295

19.2.2	Cas d'un solide situé au voisinage de la Terre . . . . .	297
<b>19.3</b>	<b>Relation fondamentale de la dynamique dans un repère lié à la Terre . . .</b>	<b>298</b>
19.3.1	Équations du mouvement . . . . .	298
19.3.2	Action de pesanteur terrestre. . . . .	299
19.3.3	Conclusions sur les équations de la dynamique dans un repère lié à la Terre . . . . .	300
<b>19.4</b>	<b>Équations de la dynamique d'un solide par rapport à un repère dont le mouvement est connu relativement à la Terre . . . . .</b>	<b>301</b>
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>303</b>
<b>CHAPITRE 20 Généralités sur la dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides . . . . .</b>		<b>304</b>
<b>20.1</b>	<b>Dynamique d'un solide . . . . .</b>	<b>304</b>
20.1.1	Équations générales . . . . .	304
20.1.2	Schéma d'étude général . . . . .	305
<b>20.2</b>	<b>Dynamique d'un ensemble de solides . . . . .</b>	<b>306</b>
<b>20.3</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>307</b>
	<b>Commentaires . . . . .</b>	<b>308</b>
<b>CHAPITRE 21 Dynamique d'un système à un degré de liberté Analyse des vibrations . . . . .</b>		<b>309</b>
<b>21.1</b>	<b>Équations générales. . . . .</b>	<b>309</b>
21.1.1	Introduction . . . . .	309
21.1.2	Paramètres de situation . . . . .	310
21.1.3	Cinématique . . . . .	310
21.1.4	Cinétique . . . . .	310
21.1.5	Actions mécaniques exercées sur le solide . . . . .	311
21.1.6	Application du principe fondamental . . . . .	311
<b>21.2</b>	<b>Vibrations en l'absence de frottement . . . . .</b>	<b>313</b>
21.2.1	Équation du mouvement . . . . .	313
21.2.2	Vibrations libres . . . . .	313
21.2.3	Vibrations forcées en régime permanent . . . . .	314
<b>21.3</b>	<b>Vibrations avec frottement visqueux . . . . .</b>	<b>318</b>
21.3.1	Équation du mouvement . . . . .	318
21.3.2	Vibrations libres . . . . .	318
21.3.3	Vibrations forcées en régime harmonique . . . . .	324
21.3.4	Vibrations forcées dans le cas d'une force périodique imposée . . . . .	331
21.3.5	Vibrations dans le cas d'une force imposée quelconque . . . . .	332
21.3.6	Vibrations forcées dans le cas d'un mouvement imposé au support . . . . .	333
<b>21.4</b>	<b>Vibrations avec frottement sec . . . . .</b>	<b>336</b>
21.4.1	Équations du mouvement . . . . .	336
21.4.2	Vibrations libres . . . . .	337
<b>21.5</b>	<b>Amortissement visqueux équivalent . . . . .</b>	<b>339</b>
21.5.1	Introduction . . . . .	339
21.5.2	Travail de la force imposée et énergie dissipée dans le cas d'un amortissement visqueux . . . . .	340

21.5.3	Amortissement structural . . . . .	340
21.5.4	Frottement sec . . . . .	342
21.5.5	Frottement fluide . . . . .	343
21.5.6	Conclusion . . . . .	345
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>346</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>346</b>
<b>CHAPITRE 22 Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe</b>		<b>347</b>
<b>22.1</b>	<b>Équations générales.</b> . . . . .	<b>347</b>
22.1.1	Introduction . . . . .	347
22.1.2	Paramètres de situation . . . . .	348
22.1.3	Cinématique . . . . .	349
22.1.4	Cinétique . . . . .	350
22.1.5	Actions mécaniques exercées sur le solide . . . . .	351
22.1.6	Application du principe fondamental de la dynamique . . . . .	352
<b>22.2</b>	<b>Exemples de mouvements de rotation autour d'un axe</b> . . . . .	<b>354</b>
22.2.1	Solide en rotation soumis uniquement à la pesanteur . . . . .	354
22.2.2	Pendule de torsion . . . . .	356
<b>22.3</b>	<b>Problème de l'équilibrage des rotors</b> . . . . .	<b>357</b>
22.3.1	Équations générales d'un solide non équilibré en rotation . . . . .	357
22.3.2	Actions mécaniques exercées sur l'axe du rotor . . . . .	360
22.3.3	Principe de l'équilibrage . . . . .	360
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>362</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>364</b>
<b>CHAPITRE 23 Mouvement plan sur plan d'un solide</b>		<b>365</b>
<b>23.1</b>	<b>Introduction.</b> . . . . .	<b>365</b>
<b>23.2</b>	<b>Mouvement d'un parallélépipède se déplaçant sur un plan incliné.</b> . . . . .	<b>365</b>
23.2.1	Paramètres de situation et cinématique . . . . .	365
23.2.2	Cinétique du mouvement . . . . .	366
23.2.3	Actions mécaniques exercées sur le parallélépipède . . . . .	367
23.2.4	Équations déduites du principe fondamental . . . . .	368
23.2.5	Mouvement sans frottement . . . . .	369
23.2.6	Mouvement avec frottement sec . . . . .	370
23.2.7	Mouvement avec frottement visqueux. . . . .	371
<b>23.3</b>	<b>Analyse du glissement et du basculement d'un parallélépipède sur un plan incliné</b> . . . . .	<b>372</b>
23.3.1	Introduction . . . . .	372
23.3.2	Paramètres de situation et cinématique . . . . .	373
23.3.3	Équations générales . . . . .	374
23.3.4	Analyse des divers mouvements . . . . .	375
23.3.5	Conclusions . . . . .	379
<b>23.4</b>	<b>Mouvement d'un cylindre sur un plan incliné</b> . . . . .	<b>380</b>
23.4.1	Introduction . . . . .	380
23.4.2	Paramètres de situation et cinématique . . . . .	381

23.4.3	Actions mécaniques exercées sur le cylindre . . . . .	382
23.4.4	Équations générales . . . . .	383
23.4.5	Analyse des divers mouvements . . . . .	385
<b>23.5</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>387</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>388</b>
 <b>CHAPITRE 24 Autres exemples de mouvements de solides</b>		<b>389</b>
<b>24.1</b>	<b>Solide en translation</b> . . . . .	<b>389</b>
24.1.1	Expressions générales d'un solide en translation . . . . .	389
24.1.2	Solide libre en translation . . . . .	391
<b>24.2</b>	<b>Mouvement d'un solide reposant sur un chariot</b> . . . . .	<b>392</b>
24.2.1	Introduction . . . . .	392
24.2.2	Paramètres de situation . . . . .	393
24.2.3	Cinétique . . . . .	394
24.2.4	Analyse des actions mécaniques . . . . .	394
24.2.5	Équations de la dynamique . . . . .	395
24.2.6	Analyse des divers mouvements . . . . .	397
<b>24.3</b>	<b>Mouvements couplés de deux solides</b> . . . . .	<b>402</b>
24.3.1	Introduction . . . . .	402
24.3.2	Paramètres de situation et cinématique . . . . .	403
24.3.3	Cinétique . . . . .	404
24.3.4	Analyse des actions mécaniques exercées . . . . .	406
24.3.5	Équations déduites du principe fondamental de la dynamique . . . . .	408
24.3.6	Analyse des équations déduites du principe fondamental. . . . .	409
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>411</b>
	<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>412</b>
 <b>CHAPITRE 25 Les équations de Lagrange</b>		<b>413</b>
<b>25.1</b>	<b>Généralités.</b> . . . . .	<b>413</b>
25.1.1	Solide libre et solide lié . . . . .	413
25.1.2	Torseurs cinématiques partiels . . . . .	413
25.1.3	Coefficients de puissance . . . . .	415
25.1.4	Liaisons parfaites . . . . .	415
<b>25.2</b>	<b>Équations de Lagrange relatives à un solide indéformable</b> . . . . .	<b>416</b>
25.2.1	Introduction aux équations de Lagrange . . . . .	416
25.2.2	Équations de Lagrange . . . . .	417
25.2.3	Cas où les actions mécaniques admettent une énergie potentielle . . . . .	418
<b>25.3</b>	<b>Équations de Lagrange pour un ensemble de solides.</b> . . . . .	<b>419</b>
25.3.1	Équations de Lagrange pour chaque solide . . . . .	419
25.3.2	Équations de Lagrange pour l'ensemble ( $D$ ) . . . . .	420
25.3.3	Cas où les paramètres de situation sont liés . . . . .	421
<b>25.4</b>	<b>Applications.</b> . . . . .	<b>422</b>
25.4.1	Mouvement d'un parallélépipède se déplaçant sur un plan incliné. . . . .	422
25.4.2	Mouvement de deux solides couplés . . . . .	423
25.4.3	Pendule double . . . . .	425
<b>A.25</b>	<b>Annexe</b> . . . . .	<b>431</b>

<b>Exercices</b> . . . . .	<b>434</b>
<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>434</b>
<b>PARTIE VI Méthodes numériques de résolution des équations de mouvements</b>	<b>435</b>
<b>CHAPITRE 26 Résolution numérique des équations différentielles du premier ordre</b>	<b>437</b>
<b>26.1 Généralités</b> . . . . .	<b>437</b>
26.1.1 Le problème à conditions initiales données . . . . .	437
26.1.2 Méthode générale de résolution . . . . .	438
26.1.3 La méthode d'Euler . . . . .	438
<b>26.2 Méthodes de résolution à pas séparés</b> . . . . .	<b>440</b>
26.2.1 Généralités . . . . .	440
26.2.2 Méthodes de type Runge-Kutta . . . . .	442
26.2.3 Méthodes de Romberg . . . . .	446
<b>26.3 Méthodes à pas liés</b> . . . . .	<b>449</b>
26.3.1 Introduction aux méthodes à pas liés . . . . .	449
26.3.2 Méthodes basées sur l'interpolation de Newton . . . . .	450
26.3.3 Généralisation des méthodes à pas liés . . . . .	452
26.3.4 Exemples de méthodes à pas liés . . . . .	453
26.3.5 Résultats . . . . .	454
<b>Exercices</b> . . . . .	<b>456</b>
<b>Commentaires</b> . . . . .	<b>456</b>
<b>CHAPITRE 27 Procédures numériques de résolution des équations de mouvements</b>	<b>457</b>
<b>27.1 Équation de mouvement d'un solide à un degré de liberté</b> . . . . .	<b>457</b>
27.1.1 Forme de l'équation de mouvement à un degré de liberté . . . . .	457
27.1.2 Principe de la résolution numérique . . . . .	457
27.1.3 Application au cas du mouvement d'un pendule pesant . . . . .	458
<b>27.2 Équations de mouvements à plusieurs degrés de liberté</b> . . . . .	<b>461</b>
27.2.1 Forme des équations de mouvements à plusieurs degrés de liberté . . . . .	461
27.2.2 Principe de la résolution . . . . .	462
27.2.3 Trajectoires et vecteurs cinématiques . . . . .	462
<b>27.3 Mouvements de planètes et de satellites</b> . . . . .	<b>463</b>
27.3.1 Mouvement d'une planète autour du Soleil . . . . .	463
27.3.2 Mouvement d'un satellite autour de la Terre . . . . .	467
27.3.3 Lancement et mouvement d'une sonde lunaire . . . . .	468
<b>27.4 Mouvement d'un solide sur un plan incliné</b> . . . . .	<b>469</b>
<b>27.5 Mouvement de deux solides couplés</b> . . . . .	<b>471</b>
27.5.1 Équations du mouvement . . . . .	471
27.5.2 Résolution analytique dans le cas de faibles amplitudes et en l'absence de frottement . . . . .	474
27.5.3 Résolution numérique des équations de mouvement . . . . .	476

<b>Exercices</b> .....	<b>480</b>
<b>Commentaires</b> .....	<b>480</b>
<b>PARTIE VII Solutions des exercices</b> .....	<b>481</b>
Chapitre 1 <b>Espace vectoriel <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	<b>483</b>
Chapitre 2 <b>L'espace géométrique</b> .....	<b>486</b>
Chapitre 4 <b>Rappels sur les courbes</b> .....	<b>492</b>
Chapitre 5 <b>Torseurs</b> .....	<b>494</b>
Chapitre 6 <b>Cinématique du point</b> .....	<b>500</b>
Chapitre 7 <b>Études de mouvements particuliers</b> .....	<b>505</b>
Chapitre 9 <b>Cinématique du solide</b> .....	<b>509</b>
Chapitre 10 <b>Cinématique de solides en contact</b> .....	<b>516</b>
Chapitre 11 <b>Généralités sur les actions mécaniques</b> .....	<b>523</b>
Chapitre 12 <b>Gravitation. Pesanteur. Centre de masse</b> .....	<b>531</b>
Chapitre 14 <b>Statique d'un solide et d'un ensemble de solides</b> .....	<b>538</b>
Chapitre 15 <b>L'opérateur d'inertie</b> .....	<b>548</b>
Chapitre 16 <b>Torseur cinétique. Torseur dynamique. Énergie cinétique</b> .....	<b>559</b>
Chapitre 21 <b>Dynamique d'un système à un degré de liberté</b> <b>Analyse des vibrations</b> .....	<b>567</b>
Chapitre 22 <b>Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe</b> .....	<b>571</b>
Chapitre 24 <b>Autres exemples de mouvements</b> .....	<b>577</b>
Chapitre 25 <b>Les équations de Lagrange</b> .....	<b>596</b>

