
collection informatique dirigée par Jean-Charles Pomerol

Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^n

théorie, algorithmes et complexité

Salim Haddadi

 hermes

Lavoisier

Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^n

© LAVOISIER, 2012

LAVOISIER
11, rue Lavoisier
75008 Paris

www.hermes-science.com
www.lavoisier.fr

ISBN 978-2-7462-3907-4
ISSN 1242-7691

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite" (article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Tous les noms de sociétés ou de produits cités dans cet ouvrage sont utilisés à des fins d'identification et sont des marques de leurs détenteurs respectifs.

Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^n

théorie, algorithmes et complexité

Salim Haddadi

hermes
Science
—publications—

Lavoisier

Collection dirigée par Jean-Charles Pomerol

Extrait de la collection

BANATRE Michel *et al.* – *Informatique diffuse*, 2007.

CAFERRA Ricardo – *Logique pour l'informatique et pour l'intelligence artificielle*, 2011

CARDON Alain – *La complexité organisée : systèmes adaptatifs*, 2004.

CHRISMENT Claude *et al.* – *Bases de données relationnelles*, 2008.

CHRISMENT Claude *et al.* – *Bases de données orientées-objet*, 2011

FOURNIER Jean-Claude – *Théorie des graphes et applications*, 2011

GUILLOT Philippe – *Courbes elliptiques : une présentation élémentaire pour la cryptographie*, 2010.

HOMES Bernard – *Les tests logiciels*, 2011

MAHOUT Vincent – *Programmation en langage d'assemblage*, 2011

PARIS Stéphane – *Le multimédia et la compression*, 2009.

PARIS Stéphane – *Le multimédia*, 2009.

PIERSON Jacky – *La biométrie*, 2007.

POLI Alain et GUILLOT Philippe – *Algèbre et protection de l'information*, 2005.

POLI Alain et GUILLOT Philippe – *Algèbre, confidentialité et intégrité en multimédia*, 2009.

ROSENTHAL-SABROUX Camille et CARVALHO Americo – *Management et gouvernance des SI*, 2009

VARRETTE Sébastien et BERNARD Nicolas – *Programmation avancée en C avec exercices corrigés*, 2006.

VERDRET Philippe – *De Perl à Java : programmation des expressions régulières*, 2004.

Table des matières

Préface	9
Avant-propos	11
Chapitre 1. Matrices	13
1.1. Matrices et vecteurs	13
1.2. Opérations sur les matrices	16
1.3. Matrices carrées	21
1.4. Matrice inversible	25
1.5. Opérations élémentaires sur les lignes	26
1.6. Forme échelonnée	30
1.7. Forme canonique	43
1.8. Inversion d'une matrice carrée	47
1.9. Equivalence de matrices	51
1.10. Déterminant	54
1.11. Matrice en blocs	67
1.12. Exercices	71
Chapitre 2. L'espace vectoriel linéaire \mathbb{R}^n	79
2.1. Espaces et sous-espaces vectoriels linéaires	79
2.2. Enveloppe linéaire	86
2.3. Indépendance linéaire	90
2.4. Base d'un sous-espace	97
2.5. Matrice de changement de base	101
2.6. Dimension d'un sous-espace	104

2.7. Somme de sous-espaces	109
2.8. Espace des lignes (colonnes) d'une matrice	113
2.9. Exercices	116
Chapitre 3. L'espace euclidien \mathbb{R}^n	123
3.1. Produit scalaire	123
3.2. Quelques inégalités	125
3.3. Projection d'un vecteur sur un autre	129
3.4. Orthogonalité	133
3.5. Complément orthogonal	137
3.6. Procédé d'orthonormalisation	143
3.7. Matrices orthogonales	146
3.8. Sous-espaces affines	150
3.9. Hyperplans	155
3.10. Exercices	159
Chapitre 4. Systèmes d'équations linéaires	165
4.1. Equation linéaire	165
4.2. Système de deux équations et deux inconnues	168
4.3. Système d'équations linéaires	171
4.4. Existence et unicité d'une solution	174
4.5. Structure et dimension de la solution générale	178
4.6. Méthode de Cramer	186
4.7. Méthode d'élimination de Gauss	187
4.8. Rapidité de la méthode de Gauss	196
4.9. Précision de la méthode de Gauss	201
4.10. Exercices	204
Chapitre 5. Compléments	209
5.1. Transformation linéaire	209
5.2. Quelques transformations linéaires usuelles	215
5.3. Matrice standard d'une transformation linéaire	218
5.4. Noyau et image	221
5.5. Isomorphisme	226
5.6. Valeurs propres et vecteurs propres	228
5.7. Matrices diagonalisables	233
5.8. Exercices	237

Chapitre 6. Complexité de l'algèbre linéaire	243
6.1. Double description et bonne caractérisation	243
6.2. Brève incursion en théorie des nombres	247
6.3. Représentation des nombres rationnels	249
6.4. Tailles digitales	254
6.5. Complexité de l'algèbre linéaire	265
6.6. Exercices	265
Annexes	267
A. Introduction sommaire et informelle à la théorie de la complexité	267
A.1. Cadre de la théorie de la complexité	267
A.2. Problème et algorithme	270
A.3. Taille digitale	271
A.4. Complexité d'un algorithme	274
A.5. Distinction entre efficacité et inefficacité	279
A.6. Complexité dans le modèle arithmétique	283
A.7. Problème de décision et complémentaire	284
A.8. Classe \mathbb{P}	286
A.9. Classe \mathbb{NP}	288
A.10. Classe coNP et bonne caractérisation	291
A.11. $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$?	291
Bibliographie	295
Index	299

Préface

Cela fait déjà plus de vingt ans que je connais l'auteur : il était venu, au début des années 1990, préparer sous ma direction un doctorat sur l'application des schémas de décomposition lagrangienne à des problèmes discrets. Il s'était déjà, à l'époque, avéré un chercheur indépendant et persévérant, porteur d'idées originales et doublé d'un collègue extrêmement positif et cordial. De retour dans son pays, l'Algérie, il fait bénéficier de son savoir-faire les étudiants de l'Université de Guelma, ville connue pour constituer une part du cœur historique de l'Algérie contemporaine.

Chercheur, Salim Haddadi se situait sur cette ligne de frontière originale et insuffisamment fréquentée qui sépare le continu du discret, et les mathématiques de l'algèbre et de l'analyse de l'algorithmique de la décision et de la recherche opérationnelle. Il se situait ainsi, d'une certaine façon, dans la continuité du mouvement amorcé par Claude Berge, et qui articulait topologie et algèbre linéaire avec les théories émergentes des graphes et des jeux. Enseignant, il a souhaité continuer d'affirmer l'importance de ce lien entre mathématiques et informatique du logiciel, qui justifie, d'un point de vue pratique, la capacité des mathématiques à s'exporter en direction du logiciel décisionnel et des problèmes de management d'entreprise. Son ouvrage est le reflet de ce parti pris.

Résolument focalisé sur la pédagogie, et destiné en priorité à des étudiants de niveau licence, le livre de Salim Haddadi constitue cependant une contribution qui sera appréciable pour les étudiants de master et même pour les chercheurs. Ce n'est bien sûr pas le seul ouvrage qui traite d'algèbre linéaire ou d'algorithmique des tableaux. Il existe notamment beaucoup de

monographies consacrées à la programmation linéaire et ses applications à la gestion de production ou à l'optimisation combinatoire, et beaucoup de manuels dédiés aux fondamentaux de la théorie du calcul matriciel. Mais c'est certainement un des seuls qui, centrés sur l'étudiant de 1^{er} et 2^e cycle, s'efforce d'articuler les grands concepts de l'algèbre linéaire (produit scalaire, systèmes d'équation linéaire, etc.), et ceux de l'algorithmique et de l'informatique du développement logiciel (complexité, codage en tableaux pleins et creux, représentation des nombres, bibliothèques, efficacité théorique *versus* pratique, etc.).

Clair, précis, rédigé dans un double souci de rigueur et de pédagogie, il exprime une expérience et un savoir-faire accumulé par son auteur tout au long de sa carrière et a certainement requis un long travail de mise au point. Je suis absolument certain qu'il constituera, tant pour les étudiants ingénieurs, mathématiciens ou informaticiens, que pour leurs enseignants ou pour les chercheurs, un outil d'une extrême utilité.

Alain QUILLIOT

Avant-propos

Ce livre est le premier d'une série d'ouvrages sur les « prérequis mathématiques pour l'informatique ». Il sera suivi d'autres, consacrés aux mathématiques discrètes, à la programmation linéaire, à la théorie des graphes, à la conception et l'analyse d'algorithmes, à la théorie de la calculabilité et de la complexité et à l'optimisation combinatoire. Ce recueil est destiné, dans mon esprit, à combler le déficit substantiel en outils mathématiques constaté dans les cursus de licence et de master, dans le département « informatique » de l'université où j'exerce.

Cet ouvrage n'a aucunement l'ambition de constituer un traité d'algèbre linéaire parce qu'il n'en aborde que les aspects les plus élémentaires. Ce n'est pas non plus un livre traditionnel qui se contente de couvrir les aspects théoriques. C'est un texte introductif destiné aux étudiants du premier cycle préparant une licence en informatique, en recherche opérationnelle, en économie ou en sciences sociales, c'est-à-dire des étudiants pour lesquels la manipulation des données en tableaux est une tâche importante.

Du point de vue de l'informaticien, résoudre un problème signifie, en général, le résoudre en se faisant aider de l'ordinateur. Or, ce dernier ne peut pas tout faire : il a des limites d'ordre qualitatives et quantitatives. On connaît des problèmes que la machine ne peut résoudre, et d'autres que la machine ne peut résoudre que dans un temps excessivement long. Un mathématicien accepte, à titre d'exemple, la méthode de Cramer que l'on verra plus tard, comme un moyen de résoudre un système d'équations linéaires avec autant d'inconnues. C'est un procédé finitaire satisfaisant sur le plan théorique. En pratique, sur ordinateur, ce procédé n'est pas le plus « efficace ». Dans cet

ordre d'idées, le livre contient un chapitre inhabituel qui étudie la complexité théorique des problèmes posés en algèbre linéaire (résolution d'un système d'équations linéaires, calcul de l'inverse d'une matrice, du déterminant, du rang). Deux raisons m'ont poussé à joindre une annexe introduisant de manière informelle la théorie de la complexité. D'abord, mon ambition de rédiger un livre de base se suffisant à lui-même (*self-contained* diraient les anglo-saxons). Ensuite, l'étude de la complexité de l'algèbre linéaire requiert pour le lecteur l'obligation de se familiariser avec cette notion, d'une manière intuitive au moins, mais sans formalisme, car cela nous ferait complètement déborder des limites de l'objectif fixé.

Avant de clore, je tiens à remercier vivement mon ami Alain Quilliot, qui a dirigé ma thèse il y a déjà fort longtemps, et qui m'a fait aimer l'informatique et le monde du discret, de m'avoir fait l'honneur de préfacier cet ouvrage. Merci à Meziane Aïder et Philippe Mahey d'avoir lu le manuscrit, corrigé de nombreuses erreurs et coquilles, et proposé des suggestions. Tout cela a contribué à améliorer et rehausser la qualité du livre. Hélas, je n'ai pas pris en compte certaines de leurs critiques. Non pas qu'elles fussent superficielles, bien le contraire. Il m'a été reproché de m'être restreint à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , sans jamais introduire de polynôme ou de fonction. De même, il m'a été reproché de n'avoir pas introduit de nombre complexe en abordant les valeurs propres. Ma réponse a été celle avec laquelle j'ai commencé cet avant-propos. J'ai voulu simplement un texte basique pour mes étudiants, ceux du premier cycle préparant une licence, et plus tard un master, en informatique, pour les préparer aux modules de programmation linéaire, programmation mathématique et optimisation combinatoire. Je tiens également à remercier Laura Gaspar, des éditions Hermès. Son magnifique travail de correction a permis de débusquer un nombre incalculable d'erreurs.

Pour mettre un peu de bonne humeur — ce qui n'est pas forcément incompatible avec les mathématiques — chaque chapitre débute avec une citation que j'ai trouvé fort amusante. Je vous laisse apprécier.

L'algèbre linéaire permet de résoudre les équations dites linéaires utilisées en mathématiques, en informatique, en mécanique, en sciences naturelles ou en sciences sociales. Du point de vue de l'informaticien, la résolution passe par l'ordinateur. Or, ce dernier ne peut pas tout faire. Il y a des limites d'ordre qualitatives et quantitatives que la machine ne peut dépasser, et d'autres qu'elle ne peut franchir que dans un temps excessivement long.

Cet ouvrage théorique et pratique expose tour à tour :

- les matrices et leurs opérations ;
- l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ;
- l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni du produit scalaire ;
- les systèmes d'équations linéaires ;
- les transformations linéaires, les valeurs et vecteurs propres.

Il contient également un chapitre spécifique sur la complexité théorique des problèmes posés en algèbre linéaire (résolution d'un système d'équations linéaires, calcul de l'inverse d'une matrice, du déterminant, du rang, etc.) ainsi qu'une annexe introduisant la théorie de la complexité.

Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^n tire son originalité de la présentation des grands concepts de l'algèbre linéaire et ceux de l'algorithmique et de l'informatique théorique.

L'auteur

Salim Haddadi est professeur en recherche opérationnelle. Ses recherches portent sur l'optimisation combinatoire et la théorie de la complexité.