collection informatique dirigée par Jean-Charles Pomerol

Théorie des graphes et applications

avec exercices et problèmes

2[e] édition revue et augmentée

Jean-Claude Fournier

hermes

Lavoisier

Théorie des graphes et applications

A Hugo, Eliott, Mathieu, Elise, Aurélie, Antonin, Ethan, Ermine et suivants…

LAVOISIER
11, rue Lavoisier
75008 Paris

www.hermes-science.com
www.lavoisier.fr

ISBN 978-2-7462-3215-0
ISSN 1242-7691

FSC
Mixed Sources
Product group from well-managed forests and other controlled sources
Cert no. SGS-COC-2953
www.fsc.org
© 1996 Forest Stewardship Council

Printed and bound in England by Antony Rowe Ltd, Chippenham, April 2011.

Théorie des graphes et applications

avec exercices et problèmes

2e édition, revue et augmentée

Jean-Claude Fournier

Hermes Science publications

Lavoisier

Collection dirigée par Jean-Charles Pomerol

Extrait de la collection

BANATRE Michel *et al. – Informatique diffuse*, 2007.

BARTHELEMY Pierre, ROLLAND Robert et VERON Pascal – *Cryptographie*, 2005.

CAFERRA Ricardo – *Logique pour l'informatique et pour l'intelligence artificielle*, 2010

CARDON Alain – *La complexité organisée : systèmes adaptatifs*, 2004.

CHRISMENT Claude *et al. – Bases de données relationnelles*, 2008.

CHRISMENT Claude *et al.– Bases de données orientées-objet*, 2011

GUILLOT Philippe – *Courbes elliptiques : une présentation élémentaire pour la cryptographie*, 2010.

HOMES Bernard – *Les tests logiciels*, 2011

PARIS Stéphane – *Le multimédia et la compression*, 2009.

PARIS Stéphane – *Le multimédia,* 2009.

PIERSON Jacky – *La biométrie*, 2007.

POLI Alain et GUILLOT Philippe – *Algèbre et protection de l'information*, 2005.

POLI Alain et GUILLOT Philippe – *Algèbre, confidentialité et intégrité en multimédia*, 2009.

VARRETTE Sébastien et BERNARD Nicolas – *Programmation avancée en C avec exercices corrigés*, 2006.

VERDRET Philippe – *De Perl à Java : programmation des expressions régulières*, 2004.

Avant-propos à la deuxième édition

Cette deuxième édition est expurgée de quelques erreurs et incorrections malheureusement encore présentes dans la première édition. Mais surtout, elle est enrichie de plusieurs parties nouvelles, sur des sujets qui se sont révélés utiles dans un ouvrage de base sur la théorie des graphes et ses applications.

C'est d'abord le chapitre 6, *Chemins optimaux*, qui a été complété significativement avec une série d'algorithmes qui résolvent le problème général de la recherche de plus courts chemins dans les graphes valués. Ces algorithmes sont classiques aussi, mais beaucoup plus sophistiqués que les très classiques algorithmes de Dijkstra et de Floyd. Nous introduisons à cette occasion une expression algorithmique originale qui permet une présentation plus simple et conceptuellement plus claire de ces algorithmes.

Un chapitre entièrement nouveau a été ajouté : le chapitre 7, *Parcours en largeur lexicographique*. Il s'agit d'un algorithme devenu très classique aujourd'hui, et qui est un outil efficace de reconnaissance de certaines classes de graphes.

Un appendice, *Algorithmes randomisés de graphes*, est donné en fin d'ouvrage. Ces algorithmes ont beaucoup été développés ces dernières années. Ils représentent une toute autre façon d'envisager un traitement algorithmique, qui permet de résoudre de façon élégante et efficace beaucoup de problèmes, dont certains connus pour être algorithmiquement difficiles. Deux exemples représentatifs de problèmes de graphes sont ainsi traités.

Enfin, pour faciliter l'accès aux notions décrites dans cet ouvrage, l'index a été largement développé. En particulier, à la rubrique *Algorithme* sont référencés les algorithmes étudiés, et à la rubrique *Problème*, les problèmes traités.

Nous remercions Guillaume Fournier pour sa participation à la mise au point de ces nouvelles parties.

Jean-Claude Fournier

Table des matières

Introduction

La notion de graphe est relativement récente puisqu'elle n'est apparue formellement qu'au cours du XX$^{\text{e}}$ siècle. Mais elle est aujourd'hui devenue indispensable dans de nombreux domaines, notamment en informatique fondamentale et appliquée, en optimisation, en complexité algorithmique. L'étude des graphes et de leurs applications est donc l'occasion d'aborder des questions très diverses, dont les applications sont nombreuses. C'est ainsi qu'on développera par exemple les méthodes d'ordonnancement de tâches à partir des chemins optimaux dans les graphes, ou encore des propriétés de réseaux de communication à propos de la connectivité des graphes. Historiquement, les graphes ont été en fait considérés, bien avant la lettre de la théorie, avec des problèmes célèbres comme celui des ponts de Königsberg (présenté au chapitre 10).

Cet ouvrage étudie les principaux aspects de la théorie des graphes, avec surtout des applications très significatives. Par son contenu, il permet de viser les niveaux licence et master d'un cursus LMD, pour lequel on y trouvera aisément la matière pour un ou plusieurs modules. Il demande peu de prérequis, si ce n'est bien sûr une certaine familiarité avec le vocabulaire de base et le raisonnement mathématique... En retour, l'étude de cette matière nouvelle est une bonne occasion pour les élèves de tester et d'améliorer leur logique personnelle. Les graphes constituent en effet un sujet d'étude nouveau, très différent des sujets mathématiques classiquement enseignés, mais qui exige la même rigueur intellectuelle. La grande nouveauté du sujet étudié peut d'ailleurs désarçonner même de bons élèves en mathématiques, c'est dire combien l'étude de cette matière est profitable !

Ce livre conçu, comme un cours, est le fruit d'une longue expérience d'enseignement en seconds cycles de mathématiques et d'informatique, dont le master MIAGE. On y trouvera aussi de nombreux exercices et problèmes.

Ceux-ci sont classés en cinq niveaux qui sont, par ordre de difficulté croissante :

1. Certains points et petites démonstrations, plutôt faciles, sont laissés à la vérification du lecteur. Ils sont signalés en marge du texte par un point d'exclamation (**!**).
2. Dans les exercices proposés à la fin de chaque chapitre, certains sont marqués +, ce qui signale un complément utile du chapitre, éventuellement utilisé ailleurs.
3. Les exercices qui ne sont pas marqués sont d'une difficulté normale, exercices standards parmi lesquels se trouvent les plus classiques du domaine.
4. Les exercices marqués * sont plus difficiles. Ils proposent une réflexion un peu plus approfondie sur tel ou tel sujet en rapport avec le chapitre.
5. Un dernier niveau est proposé avec quelques problèmes donnés à la fin, commentés et parfois complétés d'aides pour la résolution (chapitre 13).

Quelques précisions sur la présentation de cet ouvrage. Il est divisé en chapitres, lesquels sont divisés en sections. Au sein d'une section, les différents aspects du sujet traité sont éventuellement développés dans des sous-sections. Mis à part les deux chapitres de définitions et généralités que sont le chapitre 1 pour les graphes non orientés et le chapitre 4 pour les graphes orientés, chaque chapitre développe un sujet précis accompagné d'une grande application, et se trouve donc relativement indépendant des autres chapitres. Il est ainsi possible de faire des choix pour organiser un cours. Les énoncés sont désignés suivant leur rôle et leur importance dans la théorie par la terminologie classique : théorèmes, propositions, corollaires et lemmes. Précisons cette terminologie : un *théorème* est un résultat marquant qui a une certaine portée dans la théorie, une *proposition* a moins de portée, un *corollaire* est un résultat qui se déduit directement d'un résultat principal, un *lemme* est un résultat ayant un certain caractère technique et qui généralement sert à montrer un autre résultat. La fin de la preuve d'un énoncé est signalée par le symbole $\square$.

Les graphes, on l'a dit, sont très utilisés dans les applications et de ce fait beaucoup de problèmes sont résolus d'une façon constructive, ce qui conduit à écrire des algorithmes qui sont éventuellement destinés à être exprimés dans tel ou tel langage de programmation. Certains de ces algorithmes ne sont pas simples, il est d'autant plus important de les exprimer de la façon la mieux structurée possible, ce qui rendra en outre plus aisée leur écriture sous forme de programmes. Nous avons voulu dans cet ouvrage ne pas négliger et même expliciter au mieux cet aspect algorithmique, et c'est pourquoi nous expliquons avec précision, en annexe A, le mode d'expression des algorithmes qui est suivi. Dans la même ligne, en annexe B, nous donnons les bases de ce qui est devenu aujourd'hui indispensable de connaître dans tout développement scientifique, à savoir la théorie de la complexité algorithmique. Impossible de parler d'un algorithme sans parler de sa complexité ! Mais cela suppose une bonne connaissance au moins des classes de base de la théorie de la complexité, qui sont donc présentées dans cette annexe (l'expérience montrant qu'il est encore bien difficile de compter sur ce qui devrait normalement avoir été acquis ailleurs).

Une très large majorité des écrits sur les graphes et leurs applications sont écrits, comme dans tout domaine scientifique en général, en langue anglaise. Il est donc évidemment utile d'avoir au moins la traduction anglaise des principaux termes définis dans cet ouvrage, du moins lorsqu'il y a l'équivalent clair en anglais du mot ou de l'expression française concernée. Ces traductions sont données en note de bas de page, au fur et à mesure. Cette façon de faire nous a semblé plus pratique qu'un simple lexique, car elle permet sur le moment de donner les commentaires voulus, sachant que ces traductions, comme d'ailleurs la terminologie en général sur les graphes, ne sont pas toujours très claires dans la littérature.

Précisons enfin les deux points techniques suivants :

- Concernant le symbole d'inclusion d'ensembles, nous respectons la notation française $X \subset Y$, qui diffère de la notation anglo-saxonne $X \subseteq Y$. Ainsi dans cet ouvrage l'écriture $X \subset Y$ *n'exclut pas* le cas $X = Y$.
- Nous conservons la distinction, peut-être critiquable mais entrée dans les mœurs, entre *minimal* et *minimum*, de même entre *maximal* et *maximum*. Normalement, le mot « maximum » est un substantif et ne devrait donc pas être employé comme adjectif. Mais, par exemple, l'expression courante en théorie des graphes « couplage maximum » est à interpréter comme « couplage qui est un maximum ». Le maximum dans ce cas est à comprendre relativement au nombre d'éléments (un couplage est défini comme un ensemble d'arêtes). Dans l'autre expression « flot maximum », il faut comprendre « flot dont la valeur est un maximum », la valeur d'un flot étant un nombre qui lui est associé. En fait, « maximum » implique l'idée de supérieur ou égal à tous les autres. En revanche, l'adjectif « maximal » signifie lui, comme classiquement en mathématiques, qu'il n'y a pas d'élément supérieur, pour

une relation d'ordre partielle qui sera généralement ici l'inclusion ensembliste. C'est bien le sens de *maximal* dans l'expression « couplage maximal » employée par exemple au chapitre 8.

Il existe aujourd'hui une littérature importante sur les graphes et leurs applications. Nous donnons en bibliographie à la fin quelques-unes seulement des très nombreuses références du domaine, le lecteur trouvera des bibliographies plus complètes dans certains des ouvrages cités. Certaines de ces références sont relativement anciennes, mais ce sont celles d'ouvrages qui d'une part conservent aujourd'hui tout leur intérêt scientifique et pédagogique et qui d'autre part ont nourri en leur temps notre réflexion et nous leurs en sommes redevables. Nous voulons citer plus particulièrement la référence [1] de Claude BERGE, ouvrage qui avec d'autres du même auteur constitue toujours une référence principale en matière de théorie des graphes, en France et à l'étranger. Des références plus spécialisées sont données par ailleurs au fil du texte.

Nous remercions Nicolas Thiant d'avoir contribué très utilement à une ultime vérification du manuscrit. Mais il reste sans doute encore des améliorations à apporter ! Toutes remarques et suggestions des lecteurs seront les bienvenues (à : fournier@math.jussieu.fr).

Pour finir, nous voulons remercier Jean-Charles Pomerol pour l'intérêt qu'il a aussitôt manifesté pour cet ouvrage et son édition chez Hermès Lavoisier.

Jean-Claude Fournier

collection informatique dirigée par Jean-Charles Pomerol

Cet ouvrage, à la fois pédagogique et complet, présente une étude des principaux aspects de la théorie des graphes et de ses applications, en particulier celles relevant de l'optimisation combinatoire.

Il expose ainsi en détail des sujets significatifs associés, tels que le problème de l'emploi du temps avec les colorations, l'affectation optimale avec les couplages et le « voyageur de commerce » avec les cycles hamiltoniens.

Dans cette nouvelle édition, le thème des chemins optimaux – aux nombreuses applications – est enrichi de nouveaux algorithmes présentés de façon originale.

Chaque chapitre est accompagné d'exercices de niveaux différents. Des problèmes généraux sont proposés en fin d'ouvrage. Les algorithmes randomisés de graphes y sont aussi traités. Deux annexes aident le lecteur, en particulier pour une introduction au délicat sujet de la complexité algorithmique.

L'auteur

Jean-Claude Fournier est professeur honoraire des universités, membre de l'équipe Combinatoire et Optimisation au sein de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ) à l'université Pierre et Marie Curie. Ses recherches portent sur différents aspects de la théorie des graphes, de l'algorithmique des graphes et de la combinatoire en général.

978-2-7462-3215-0

hermes Science publications

www.hermes-science.com